

**UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
LA MOLINA**

**ESCUELA DE POSGRADO
MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA APLICADA**



**“MODELOS ESTADÍSTICOS EN PROCESOS PUNTUALES
ESPACIALES POISSON PARA EVALUAR LA DISTRIBUCIÓN
ESPACIAL DE LOS HECHOS DELICTIVOS EN LIMA, PERÚ”**

Presentada por:

BRAULIO QUISPE QUISPE

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE
MAGISTER SCIENTIAE EN ESTADÍSTICA APLICADA**

Lima – Perú

2016

**UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
LA MOLINA**

**ESCUELA DE POSGRADO
MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA APLICADA**

**“MODELOS ESTADÍSTICOS EN PROCESOS PUNTUALES
ESPACIALES POISSON PARA EVALUAR LA DISTRIBUCIÓN
ESPACIAL DE LOS HECHOS DELICTIVOS EN LIMA, PERÚ”**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE
MAGISTER SCIENTIAE EN ESTADÍSTICA APLICADA**

Presentada por:

BRAULIO QUISPE QUISPE

Sustentada y aprobada ante el siguiente jurado:

Mg.Sc. Jesús Walter Salinas Flores
PRESIDENTE

Mg.Sc. Carlos López de Castilla Vásquez
PATROCINADOR

Mg.Sc. Jaime Carlos Porras Cerrón
MIEMBRO

Mg.Sc. Raphael Félix Valencia Chacón
MIEMBRO

*Dedicado a Dios, a mi esposa
y a mis dos hijos, de igual forma
a mis padres y hermanos.*

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento a cada uno de los docentes de la maestría de Estadística Aplicada de la Universidad Nacional Agraria La Molina y en especial a mi asesor de tesis, M. Sc. Carlos López de Castilla Vásquez, un buen guía y maestro, por su apoyo inmensurable en el desarrollo de esta tesis, siendo siempre muy acucioso en sus críticas, así mismo por darme la confianza de estar desarrollando un buen trabajo.

Al equipo de “Sistemas de Información Geográfica” de la Unidad de Estadística del Ministerio de Educación, por haberme permitido conocer y aplicar la Estadística Espacial y en general las técnicas del Análisis Espacial al mundo real.

A Dios, a mi esposa, mis hijos y a mis padres por su invaluable apoyo y comprensión en el transcurso de todo el desarrollo de la presente tesis y a todas las personas que indirectamente apoyaron a la conclusión de la misma.

¡Muchas gracias a todos!

RESUMEN

La presente tesis plantea una aplicación de los modelos estadísticos de *procesos puntuales espaciales* Poisson así como de los modelos Clúster del tipo Neyman - Scott. Particularmente, se enfoca en evaluar la distribución espacial de hechos delictivos y su relación con algunas *covariables espaciales*. De esta forma se permitirá orientar y/o establecer políticas referidas a seguridad ciudadana de índole nacional y/o local. El área de estudio corresponde a los distritos de Lima Centro y Residencial, para lo cual se toma en cuenta la información de ubicaciones georreferenciadas de los hechos delictivos reportados por las víctimas a finales del año 2013 hasta inicios del 2014. Las ubicaciones de los delitos son representadas por puntos, y el conjunto de estos se consideran un *patrón puntual*, el cual representa una realización de un proceso puntual espacial subyacente en el espacio de estudio. El modelamiento estadístico se realiza a través de la *intensidad* de puntos, la cual puede ser estimada para cualquier ubicación específica del área de estudio y son los modelos log-lineales los más usados para representar su relación con un conjunto de covariables espaciales cuyos efectos podemos representar en un conjunto de parámetros; a estos modelos se les conocen como modelos paramétricos de procesos puntuales espaciales. Las estadísticas de resumen, conocidas también como propiedades de primer y segundo orden de un proceso puntual así como los métodos basados en distancia entre puntos, han sido aplicados con fines de realizar el análisis exploratorio y determinar: el tipo de distribución espacial (regular, aleatorio o clústeres) que siguen los hechos delictivos (patrón puntual), la distribución de la distancia de un punto arbitrario a un lugar de ocurrencia de un delito y de la distancia de un hecho delictivo a otro, entre otras. Finalmente, se concluye que la distribución espacial de los hechos delictivos en Lima, no es homogénea, existiendo clustering o agregación de puntos, los cuales se traducen en zonas con mayor incidencia de hechos delictivos y su intensidad guarda relación con la ubicación de los límites distritales, la inversión destinada al orden interno y la densidad poblacional.

Palabras clave: Procesos puntuales espaciales, covariables espaciales, intensidad, seguridad ciudadana, distribución espacial, modelos paramétricos.

ABSTRACT

The present thesis raises an application of the statistical models of Poisson *spatial point processes* as well as the Cluster models of the Neyman - Scott type. Particularly, it focuses on evaluating the spatial distribution of criminal acts and its relation to some *spatial covariates*. In this way, it will be possible to orient and/or establish policies related to citizen security of a national and /or local nature. The study area corresponds to the districts of Lima Centro and Residencial, which takes into account the information of georeferenced locations of the criminal events reported by the victims at the end of the year 2013 until the beginning of 2014. The locations of the crimes are represented by points, and the set of these are considered as a spatial point pattern, which represents a realization of a *spatial point process* underlying the space of study. Statistical modeling is performed through the *intensity* of points, which can be estimated for any specific location in the study area and are the log-linear models most commonly used to represent their relationship with a set of spatial covariables whose effects can be represented in a set of parameters; these models are known as parametric models of spatial point processes. The summary statistics, also known as first and second order properties of a point process as well as methods based on distance between points, have been applied for the purpose of developing the exploratory analysis and determining: the type of spatial distribution (regular, random or clusters) that follow the criminal acts (point pattern), the distribution of the distance from an arbitrary point to a place of occurrence of a crime and the distance from one criminal act to another, among others. Finally, it is concluded that the spatial distribution of criminal acts in Lima is not homogeneous, there are clustering or aggregation of points, which are translated into areas with a higher incidence of criminal acts and their intensity is related to the location of the district boundaries, the investment destined to the internal order and the population density.

Keywords: Spatial point processes, spatial covariables, intensity, citizen security, spatial distribution, parametric models.

ÍNDICE GENERAL

I.	INTRODUCCIÓN	1
1.1	PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	1
1.2	JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	3
1.3	OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	3
1.3.1	OBJETIVO GENERAL	3
1.3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	3
II.	REVISIÓN DE LITERATURA	5
2.1	NOTACIÓN	6
2.2	CONCEPTOS BÁSICOS	6
2.2.1	VENTANA DE OBSERVACIÓN	6
2.2.2	PATRONES PUNTUALES ESPACIALES	7
2.2.3	INTENSIDAD Y DENSIDAD	7
2.2.4	EFECTOS DE BORDE	8
2.2.5	INTERACCIÓN	8
2.2.6	EFEECTO DE COVARIABLES	9
2.3	PROCESOS PUNTUALES EN R^d	9
2.4	PROCESOS PUNTUALES POISSON	11
2.4.1	PROPIEDADES	13
2.4.2	OPERACIONES ENTRE PROCESOS PUNTUALES	14
2.4.3	DENSIDADES PARA LOS PROCESOS DE POISSON	15
2.5	ESTADÍSTICAS DE RESUMEN	16
2.5.1	PROPIEDADES DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN	16
2.5.2	ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA	21
2.5.3	ESTADÍSTICAS DE RESUMEN BASADA EN LAS DISTANCIAS ENTRE PUNTOS	26
2.5.4	ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA DE LAS FUNCIONES - F, G, y J	27
2.5.5	PRUEBAS DE CONTEO POR CUADRANTE PARA CSR	28
2.5.6	PRUEBAS KOLMOGOROV-SMIRNOV PARA CSR	30
2.6	MÁXIMA VEROSIMILITUD	32
2.6.1	CASO HOMOGÉNEO	33
2.6.2	CASO NO HOMOGÉNEO	34
2.6.3	MODELO LOG-LINEAL	34
2.6.4	PROPIEDADES ASINTÓTICAS	36
2.6.5	DISPOSITIVO BERMAN -TURNER	37
2.6.6	APROXIMACIÓN POR UN FINO PIXEL	39
2.6.7	MODELO NO LOGLINEALES	41
2.7	PROCESOS PUNTUALES COX	42
2.7.1	PROPIEDADES BÁSICAS	44
2.7.2	PROCESOS NEYMAN-SCOTT	45
2.7.3	PROCESOS NEYMAN-SCOTT NO HOMOGÉNEOS	46
2.7.4	ESTIMACION DE PARÁMETROS	47

2.7.5	PROPIEDADES ASINTÓTICAS.....	48
2.8	DIAGNÓSTICOS DE RESIDUALES.....	49
2.8.1	RESIDUALES.....	50
2.8.2	PROPIEDADES DE RESIDUALES.....	51
2.8.3	DIAGNÓSTICO BASADO EN GRÁFICOS.....	53
III.	MATERIALES Y MÉTODOS.....	56
3.1	MATERIALES.....	56
3.1.1	INSUMOS DE DATOS.....	56
3.1.2	MATERIAL DE ESCRITORIO.....	57
3.2	POBLACIÓN Y MUESTRA.....	57
3.3	IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES.....	58
3.3.1	VARIABLE DEPENDIENTE.....	58
3.3.2	VARIABLES INDEPENDIENTES – ESPACIALES.....	58
3.4	FORMULACIÓN DE HIPÓTESIS.....	59
3.4.1	HIPÓTESIS GENERAL.....	59
3.4.2	HIPÓTESIS ESPECÍFICA.....	59
3.5	ESPECIFICACIÓN DEL MODELO.....	59
3.5.1	PROCESO PUNTUAL ESPACIAL POISSON NO HOMOGÉNEO.....	59
3.5.2	PAQUETES DE “R” UTILIZADOS.....	60
3.6	METODOLOGÍA DE ANÁLISIS ESTADÍSTICO.....	60
IV.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	61
4.1	ANÁLISIS EXPLORATORIO ESPACIAL DE LOS DATOS.....	61
4.1.1	MAPEO DE PUNTOS.....	61
4.1.2	ESTIMACIÓN DE LA INTENSIDAD.....	63
4.1.3	ESTADÍSTICAS DE RESUMEN DE SEGUNDO ORDEN.....	66
4.1.4	PRUEBAS DE ALEATORIEDAD ESPACIAL (CSR).....	70
4.2	ESTIMACIÓN DE MODELOS.....	72
4.3	SELECCIÓN DEL MODELO.....	77
4.4	DIAGNÓSTICO DE RESIDUALES.....	78
V.	CONCLUSIONES.....	79
VI.	RECOMENDACIONES.....	81
VII.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	82
VIII.	ANEXOS.....	86

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 1. Funciones K y L teóricas para el proceso Poisson homogéneo	20
Cuadro 2. Funciones de kernel univariado	22
Cuadro 3. Funciones de kernel bivariado	22
Cuadro 4. Funciones F, G y J teóricas para el proceso Poisson homogéneo	27
Cuadro 5. Residuales para procesos puntuales espaciales Poisson	51
Cuadro 6. Estadísticas de resumen del patrón puntual bidimensional homogéneo.....	63
Cuadro 7. Pruebas de aleatoriedad espacial completa, basado en conteo de cuadrantes	70
Cuadro 8. Prueba de Kolmogorov – Smirnov, correspondiente a la abscisa (longitud)	72
Cuadro 9. Coeficientes del modelo log - lineal univariado para el caso de un proceso espacial Poisson no homogéneo	74
Cuadro 10. Coeficientes del modelo log - lineal múltiple para el caso de un proceso espacial Poisson no homogéneo	75
Cuadro 11. Coeficientes del modelo log – lineal, para el caso de un proceso espacial clúster Neyman - Scott (no homogéneo).....	76
Cuadro 12. Pruebas de razón de verosimilitud	77

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1. Patrón puntual espacial en dos dimensiones observados al interior de W (cuya forma es irregular).....	7
Fig. 2. Proceso puntual bidimensional Poisson homogéneo (lado izquierdo) y no homogéneo (lado derecho)	13
Fig. 3. Esquemas de cuadratura para datos de patrones puntuales	39
Fig. 4. Ventana de observación	58
Fig. 5. Patrón puntual bidimensional ($d = 2$) de hechos delictivos, donde la ventana de observación W representa las zonas de Lima centro y Residencial coloreadas en color celeste	62
Fig. 6. Intensidad de hechos delictivos (Puntos / km^2) para $h = 0.4$ km	64
Fig. 7. Mapa de la Intensidad de hechos delictivos con fondo de imagen satélite Google .	65
Fig. 8. Mapa de la Intensidad de hechos delictivos de las zonas con mayores incidencias	66
Fig. 9. La función K y L , para los datos de hechos delictivos.....	67
Fig. 10. La función $-g$, de correlación por pares, para los datos de hechos delictivos	68
Fig. 11. La función $-F, G$ y J , basado en distancia entre puntos	69
Fig. 12. Mapa de la intensidad basado en cuadrantes.....	71
Fig. 13. Gráfica de Kolmogorov-Smirnov para evaluar la tendencia espacial en la coordenada (x).....	72
Fig. 14. Mapa de covariables espaciales donde se superpone el patrón puntual de hechos delictivos.....	73
Fig. 15. Función K no homogénea	76
Fig. 16. Clúster ajustado (lado izquierdo) e intensidad predicha (lado derecho)	77
Fig. 17. Gráfico de diagnóstico de residuales (raw).....	78

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO 1. Ubicación de los hechos delictivos.....	86
ANEXO 2. Función - K de Ripley	88
ANEXO 3. Modelos log-lineales simples	90
ANEXO 4. Código del programa R	92

I. INTRODUCCIÓN

1.1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En los últimos años el volumen de datos georreferenciados y por tanto el uso de estos, ha presentado un incremento sustancial gracias al desarrollo de los Sistemas de Información Geográficas (SIG). Algunas aplicaciones se dan por ejemplo en materias de seguridad ciudadana para construir los denominados mapas del delito, el cual consiste en una representación gráfica de los lugares de ocurrencia de los hechos delictivos en un mapa de puntos. A estos puntos se les denominan *eventos* y su posición en el espacio puede expresarse por sus coordenadas de ubicación (longitud, latitud) para el caso bidimensional¹. El análisis de los eventos observados en forma de puntos dentro de un espacio determinado, donde el interés radica en determinar el tipo de distribución espacial y/o las causas que generan la aparición de estas, son tratados en el análisis espacial de Patrones Puntuales Espaciales², que se basa en la teoría de procesos puntuales espaciales. Por la forma como los puntos se encuentran distribuidas en el espacio, se pueden distinguir entre patrones (completamente) aleatorios, agrupados (espacialmente agregados), y regulares. La distinción anterior no debe conducir a la falsa impresión de que los dos últimos tipos de patrones no contienen ningún tipo de aleatoriedad (Schabenberger y Gotway, 2005).

Uno de los modelos estadísticos más conocidos para el análisis de patrones puntuales espaciales es el proceso puntual espacial Poisson. A partir de estos se construyen modelos más complejos para agregados de puntos (tales como el proceso Clúster) y modelos para interacción entre puntos como son los procesos puntuales de Markov (Baddeley et al., 2000; Moller y Waagepetersen, 2004). Específicamente en esta tesis se hace énfasis a los Modelos de Procesos Poisson No Homogéneos y los Procesos Neyman-Scott que son un caso especial de los procesos clústers que son útiles cuando los puntos se encuentran formando agregados espaciales. Los *modelos paramétricos* de procesos puntuales Poisson

¹ De manera general, los puntos pueden estar situados en una región de dos dimensiones o más dimensiones, en la superficie de la Tierra o en un volumen d dimensional, etc.

² El análisis espacial de patrones puntuales espaciales, es una rama de la Estadística Espacial (Bivand, 2013) donde los eventos son registrados en forma de puntos.

y de Neyman - Scott, se plantean en el término *intensidad* (los más usados se expresan en la forma log-lineal) con el fin de analizar el efecto de las covariables espaciales, y la existencia o no de tendencia espacial. A estos modelos también se les conoce como *procesos puntuales Poisson no homogéneo* y *Proceso Neyman - Scott no homogéneo* dado que la intensidad es no homogénea y dependientes de covariables espaciales. El modelo nulo por lo general es el proceso puntual Poisson homogéneo conocido también como Aleatoriedad Espacial Completa (CSR, por sus siglas en inglés), en la cual la intensidad se asume homogénea a lo largo de todo el espacio de estudio.

Por otra parte, uno de los problemas en temas de seguridad ciudadana que afronta el país, es sin lugar a duda la delincuencia. Actualmente una de las herramientas más utilizadas por las municipalidades distritales de Lima, son los mapas del delito (MLM, 2016), donde los hechos delictivos se representan en forma de puntos. Analizar la distribución espacial de los hechos delictivos (eventos), involucra considerar su localización o ubicación espacial y a partir de éstas evaluar su distribución en el espacio, es decir, los puntos (eventos) pueden estar distribuidos homogéneamente en todo el espacio (territorio) de estudio o en el caso no homogéneo pueden existir zonas con mayor incidencia de hechos delictivos pudiendo encontrarse también formando agregados espaciales. En caso de las técnicas estadísticas clásicas suponen que al estudiar un fenómeno se toman observaciones bajo circunstancias idénticas e independientes entre sí y por ello no son convenientes para analizar fenómenos que varían en tiempo o espacio. Un aspecto metodológico importante para los procesos puntuales espaciales, es el hecho de que la información observada, *i.e.*, el patrón puntual no solo consiste en un conjunto de ubicaciones de los puntos, sino también la ausencia de puntos en otras ubicaciones es también informativo (Baddeley *et al.*, 2005). Esto es útil para entender las relaciones de la ausencia de puntos con las covariables espaciales.

Ante dichos planteamientos surgen una serie de interrogantes, principalmente: ¿Existe algún modelo Estadístico de Patrones puntuales que permita describir la distribución espacial de los hechos delictivos en la ciudad de Lima? y específicamente: ¿Los hechos delictivos, ocurren de manera homogénea a lo largo de la ciudad?, ¿En los lugares con mayor densidad poblacional, existe mayor ocurrencia de hechos delictivos?, ¿La inversión en orden interno efectuado por los Municipios, favorece a la reducción de la delincuencia?, ¿Los límites jurisdiccionales (distritales) favorecen al incremento de los hechos delictivos?, ¿La distribución espacial de las comisarías y serenazgos, tiene efecto reductor en los hechos delictivos? y ¿Existe tendencia espacial de los hechos delictivos?

1.2 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Las ubicaciones de los puntos en un mapa de delitos, no son estáticas, al contrario supóngase que presentan una dinámica muy variada. Así, el número de hechos delictivos ocurridos en la ciudad de Lima, en un periodo de estudio puede considerarse variable y lo mismo ocurre con los lugares de ocurrencia. Estos dos aspectos hacen posible modelar el comportamiento de los hechos delictivos como un proceso puntual espacial pudiendo ser de Poisson y una realización de este (el conjunto de todos los hechos delictivos observados y representado por puntos) en un periodo o momento dado, es un patrón puntual de hechos delictivos.

De esta forma, el análisis espacial de patrones puntuales espaciales surgió como una herramienta que fue utilizada para determinar qué tipo de distribución espacial tienen los hechos delictivos en la ciudad de Lima y para modelar dichos fenómenos, tomando en cuenta la información de su ubicación y su relación con la densidad poblacional, la inversión en orden interno efectuado por los municipios, la ubicación de las comisarías y la ubicación de los límites jurisdiccionales. Así, el presente trabajo de investigación tiene un alcance principalmente del *tipo correlacional* y en menor parte será del *tipo explicativo*.

Aplicar el análisis de patrones puntuales en temas de seguridad ciudadana, ayudará principalmente al gobierno Nacional, Regional y/o local a orientar las políticas referidas a seguridad ciudadana, localizar las zonas de mayor incidencia delictiva tomando en cuenta su localización, visualización y cuantificación del problema desde el punto de vista espacial y/o territorial.

1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Estimar el mejor modelo estadístico de procesos puntuales espaciales que se ajuste al patrón puntual de hechos delictivos

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos específicos, consisten en determinar:

1. El tipo de patrón puntual espacial que caracteriza a la distribución los hechos delictivos en la ciudad de Lima. Es decir, determinar si los hechos delictivos se

encuentran distribuidos de forma aleatoria, o regular, o se encuentran formando agregados a lo largo de la ciudad de Lima.

2. Si en los lugares con mayor densidad poblacional, existe mayor ocurrencia de hechos delictivos.
3. Si la inversión en orden interno efectuado por los Municipios, favorece a la reducción de la delincuencia.
4. Si los límites jurisdiccionales (distritales) favorecen al incremento de los hechos delictivos.
5. Si la distribución espacial de las comisarías y serenazgos, tiene efecto reductor en los hechos delictivos y finalmente determinar si existe tendencia espacial de los hechos delictivos.

El procedimiento consistió primero en la estimación de las estadísticas de resumen (basadas en la medida de la intensidad, la función de correlación por pares y los métodos basados en distancias desde un enfoque principalmente no paramétrico) del patrón puntual de hechos delictivos (ocurridos a finales del año 2013 hasta inicios del 2014, en los distritos de Lima Centro y Residencial) y las pruebas aleatoriedad espacial completa (CSR), para determinar el tipo de distribución espacial que siguen los puntos. Seguidamente se aplicaron los modelos estadísticos de procesos puntuales espaciales Poisson y el Proceso Neyman – Scott, ambos no homogéneos, para evaluar la dependencia espacial de la intensidad de los hechos delictivos con las covariables: densidad poblacional, inversión en orden interno efectuado por los municipios, distancia a límites distritales y la ubicación de los puestos de serenazgos y/o de seguridad ciudadana.

II. REVISIÓN DE LITERATURA

El análisis Estadístico de Patrones Puntuales junto a la Geoestadística y el Análisis de datos Lattices constituyen las tres áreas más importantes de la Estadística Espacial. Un patrón puntual, constituye una realización de un proceso puntual³, que consiste en un arreglo (patrón) de puntos denominados eventos⁴. Por ejemplo, la ubicación de los árboles en un área de bosque, partículas de sangre en una placa de vidrio, las galaxias en el universo. Estos objetos se representan de una manera natural por puntos y marcas. Los puntos describen las ubicaciones de los objetos, y las marcas proporcionan información adicional, caracterizando los objetos a través de su tipo, tamaño o de forma. Así se diferencian entre patrones puntuales propiamente dichos y los patrones puntuales marcados.

Usualmente el análisis de patrones puntuales comienza con una simple representación gráfica usando un mapa de puntos. Los puntos pueden estar dispersos aleatoriamente a lo largo del espacio, mostrando regularidad o puede darse el caso en el que se muestra inhibición entre puntos o formando una estructura de clúster resultante de una interacción negativa y positiva respectivamente. Así una inspección visual suministra una caracterización cualitativa del tipo de patrón, aunque en términos bastante vagos se utilizan en la descripción inicial (agrupados, agregados, irregular, regular, inhibido, uniforme). También puede indicar las correlaciones entre los mismos o entre la intensidad de puntos y covariables espaciales, es decir, otras estructuras aleatorias que influyen en la distribución espacial de puntos tales como propiedad del suelo o influencias físicas.

Las estadísticas de resumen para procesos puntuales espaciales difieren fundamentalmente de la estadística clásica⁵. Se enfrenta a varios tipos de correlaciones en los patrones. Las distancias entre puntos relativos están correlacionadas, así como el número de puntos en

³Un proceso puntual espacial (*spatial point process*) es un mecanismo estocástico que genera un conjunto contable de eventos x_i en el espacio. (Diggle, 2014).

⁴ Un punto se refiere a cualquier lugar arbitrario en la región de estudio mientras que un evento se refiere a una observación.

⁵ La estadística clásica típicamente analiza observaciones independientes y supone una distribución gaussiana como consecuencia del teorema del límite central.

las regiones adyacentes. Además, las características de los objetos representados por los puntos pueden ser (especialmente) correlacionados. De ahí el análisis estadístico está muy preocupado con la detección y descripción de estas correlaciones. Muchos aspectos diferentes de la naturaleza de un patrón puntual espacial específico, pueden ser descritos con el uso de las estadísticas de resumen adecuadas. La más sencilla de ellas es la intensidad de puntos⁶, que en el caso pueda considerarse constante a través del espacio, se asemeja al uso de la media muestral \bar{x} en la estadística clásica. Si la intensidad de puntos no es homogénea, a menudo se sospecha de la influencia de las covariables espaciales⁷. Sin embargo, las características que son más propias de las estadísticas de procesos puntuales describen correlaciones entre los puntos en el patrón con respecto a sus distancias, por ejemplo, distancias a los vecinos más cercanos o el número de vecinos a ciertas distancias dadas. Además de la descripción estadística de patrones de puntos y a menudo en combinación con ello, los modelos de procesos puntuales adecuados pueden ser definidos y ajustarse a los datos.

2.1 NOTACIÓN

La notación usada en el presente trabajo se presenta a continuación:

X : Representa un proceso puntual definido en una región $S \subseteq \mathbb{R}^d$.

$W \subset S$: Es una ventana de observación acotada.

$x = \{x_1, \dots, x_n\}$: Un patrón puntual o una realización finita del proceso puntual X , conformado por n puntos.

u, v, \dots : Para denotar puntos en S

$\rho(u)$: Denota la intensidad en la región que contiene al punto u .

f : Para denotar una función de densidad de probabilidad.

A continuación se detalla los conceptos relacionados en la notación anterior.

2.2 CONCEPTOS BÁSICOS

2.2.1 VENTANA DE OBSERVACIÓN

La ventana de observación W constituye la región en la cual se observa un patrón puntual y se asume que es conocida. No es correcto analizar un conjunto de datos de patrones

⁶ La intensidad de puntos se refiere al número medio de objetos por unidad de área o volumen.

⁷ Algunos ejemplos de covariables espaciales son: la elevación, precipitación.

puntuales para encontrar la ventana de observación adecuada (Cressie, 1991). La estimación de las estadísticas de resumen (por ejemplo la intensidad de puntos) depende de la ventana de observación.

2.2.2 PATRONES PUNTUALES ESPACIALES

La realización de un *proceso puntual*⁸ en el caso de un espacio bidimensional, consiste en un arreglo (patrón) de puntos⁹ $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ contenidos en un conjunto aleatorio S . Estos puntos se denominan los eventos del proceso y cuando todos los eventos de la realización se registran, se dice que es un patrón puntual, en caso contrario si los eventos son observados solo parcialmente, el patrón se llama un patrón muestreado (*Sampled point mapped*). Los puntos x_i , $i = 1; 2; \dots; n$ con coordenadas espaciales ($long_i, lat_i$) en las aplicaciones son solo observados dentro de una ventana de observación (área de estudio) W , tal como se muestra en la Figura 1 (Schabenberger y Gotway, 2005).



Fig. 1: Patrón puntual espacial en dos dimensiones observados al interior de W (cuya forma es irregular).

2.2.3 INTENSIDAD Y DENSIDAD

El análogo del valor medio o esperado de una variable aleatoria es la intensidad¹⁰ de un proceso puntual. La intensidad ρ se interpreta como la densidad media de puntos (número esperado de puntos por unidad de área). Dicha medida puede ser constante (uniforme u homogénea) o puede variar de un lugar a otro (no homogénea). De manera formal se define de la siguiente forma:

⁸ Un proceso puntual espacial (*spatial point process*) es un mecanismo estocástico que genera un conjunto numerable de eventos x_i en el espacio (Diggle, 2014).

⁹ De manera general un punto u se refiere a cualquier lugar arbitrario en la región de estudio mientras que un *evento* se refiere a una observación.

¹⁰ Investigar la intensidad constituye uno de los primeros pasos en el análisis de un patrón puntual.

$$\rho(u) = \lim_{|du| \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathbb{E}[N(du)]}{|du|} \right\} \quad (2.1)$$

$\mathbb{E}[\cdot]$ denota el esperado de una variable aleatoria; $N(du)$ denota el número de eventos en la región infinitesimal du que contiene el punto u y $|du|$ es el área de du (Diggle, 2014).

La función de *densidad espacial* f tiene las mismas propiedades de la densidad univariada, pero su dominio es el área de estudio en el que se lleva a cabo el proceso puntual. Como una función alternativa para medir la distribución espacial de los eventos, es posible utilizar a la intensidad $\rho(u)$ del proceso puntual, que es proporcional a su densidad espacial. La constante de proporcionalidad es el número esperado de eventos del proceso puntual en la región observada.

La intensidad y la densidad espacial son parte de las propiedades de primer orden porque miden la distribución de los acontecimientos en la región de estudio.

2.2.4 EFECTOS DE BORDE

Los efectos de borde (*Edge -Effects*) se presentan en el análisis del patrón puntual espacial por ejemplo cuando la región W en la que se observa el patrón puntual forma parte de una región más grande en el cual opera el proceso subyacente. La dificultad esencial es que no se observan los eventos fuera de W que pueden interactuar con eventos observados dentro de W pero, precisamente porque no se observan los acontecimientos en cuestión, es difícil tomar en cuenta de forma adecuada (Diggle, 2014).

Para algunas estadísticas de resumen, los efectos de borde pueden ser ignorados dependiendo si la ventana de observación coincide con el espacio donde se define el proceso puntual espacial. Algunas alternativas para sobrellevar los efectos de borde han sido descritas por Baddeley et al. (2016).

2.2.5 INTERACCIÓN

La interacción entre puntos, es la dependencia estocástica entre puntos en un patrón puntual. Usualmente, se espera que la dependencia sea más fuerte entre puntos que están cerca uno del otro y débil en caso contrario. Estos se miden a través de las propiedades de

segundo orden¹¹, que reflejan toda tendencia de los eventos que aparezcan agrupadas, espaciadas de forma independiente o regularmente. Las propiedades de segundo orden son descritas en detalle por Ripley (1976), Moller y Waagepetersen (2004) y Diggle (2014).

2.2.6 EFECTO DE COVARIABLES

Las covariables pueden servir para eliminar la tendencia espuria, explicar la variación en la intensidad, o hacer inferencias condicionadas a otro patrón espacial. Cualquier tipo de datos puede ser tratado como variable explicativa (covariable). Una “función espacial”, “covariable espacial” o “covariable geoestadística”, es una función $Z(u)$ observable (potencialmente) en cada localización espacial $u \in W$.

Los valores de las covariables no solo deben ser observados en los puntos de datos, ya que para investigar la dependencia del proceso puntual con respecto a la covariable, necesitamos tener por lo menos algunas observaciones de la covariable en los otros puntos de la región de estudio. Alternativamente, la información de la covariable puede consistir en otro patrón espacial, tal como un patrón puntual o un patrón de segmento de línea. La forma en que esta información de la covariable entra en el análisis o modelo estadístico depende en gran medida del contexto y de la elección del modelo. Típicamente, el patrón en las covariables se utiliza para definir una función espacial sustituta Z , por ejemplo, $Z(u)$ puede ser la distancia de u al segmento de línea más cercano. El conjunto de covariables para un patrón puntual nos permiten, investigar si la intensidad depende de las covariables y/o estudiar la interacción entre puntos, antes de analizar los efectos de las covariables en la intensidad.

2.3 PROCESOS PUNTUALES EN \mathbb{R}^d

El desarrollo de la teoría de procesos puntuales, han sido descrito a detalle en Moller y Waagepetersen (2004) y Daley y Vere - Jones (2008).

Formalmente, se define un proceso puntual espacial X , como un subconjunto aleatorio numerable de un espacio $S \subseteq \mathbb{R}^d$ (el caso más simple es cuando $d = 2$). Una realización de tal proceso es un patrón puntual espacial $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ de $n \geq 0$ puntos contenidos

¹¹ La separación entre las propiedades de primer y segundo orden, puede ser difícil sin más suposiciones. Por ejemplo, ¿los grupos de eventos que aparecen en un lugar específico es porque la intensidad es mayor allí o porque los eventos se agrupan? En general, se supone que la interacción entre los puntos se produce a pequeña escala, mientras que la variación a gran escala se refleja en la intensidad.

en S . En muchas aplicaciones S es un rectángulo d -dimensional o la totalidad de \mathbb{R}^d , sin embargo también podría ser, por ejemplo, una esfera $(d - 1)$ -dimensional.

Para especificar la distribución de X , puede definirse la distribución del número de puntos $n(X)$ y para cada $n \geq 1$ condicionado a $n(X) = n$, la distribución conjunta de los n puntos en X . Un enfoque equivalente es especificar la distribución de las variables $N(B) = n(X_B)$ para subconjuntos $B \subseteq S$, donde $X_B = X \cap B$.

En la práctica observamos sólo los puntos contenidos en una ventana de observación limitada $W \subseteq S$. En general la ventana W se asume fija y conocida. Como $X \setminus W$ no es observado, nos enfrentamos a un problema al problema de efectos de borde. En la figura 2.1, $d = 2$ y W es de forma irregular. En el caso donde no se conoce la región en la cual el proceso puntual espacial se encuentra definido o si la región es muy grande o si se imponen ciertas condiciones tales como estacionariedad¹², entonces podría ser apropiado considerar un proceso puntual infinito en $S \subseteq \mathbb{R}^d$.

Nos centraremos principalmente en procesos puntuales X cuyas realizaciones son subconjuntos de S localmente finitos. Formalmente, para cualquier subconjunto $x \subseteq S$, denotaremos $n(x)$ a la cardinalidad de x , asumiremos $n(x) = \infty$ si x no es finito. Por tanto se dice x puede ser localmente finito, si $n(x_B) < \infty$ siempre que $B \subseteq S$ está acotado, donde

$$x_B = x \cap B$$

es la restricción de una configuración puntual x a B (similarmente X_B es la restricción de X a B). Por lo tanto X toma valores en el espacio definido por:

$$N_{lf} = \{x \subseteq S: n(x_B) < \infty \text{ para todo } B \subseteq S\}.$$

Los elementos de N_{lf} se llaman configuraciones puntuales localmente finitos, y se denotan por x, y, \dots , mientras u, v, \dots denotan puntos en S . La configuración puntual vacía se denota por \emptyset . En los sucesivos usaremos de la notación para referirnos a $x \cup u$ para $x \cup \{u\}$, $x \setminus v$ para $x \setminus \{v\}$, etc, cuando $x \in N_{lf}$ y $u, v \in S$.

¹² Un proceso puntual X sobre \mathbb{R}^d es estacionaria si su distribución es invariante por traslaciones, es decir, la distribución de $X + s = \{u + s : u \in X\}$ es el mismo que el de X para cualquier $s \in \mathbb{R}^d$. Es isotrópica si su distribución es invariante bajo rotaciones sobre el origen de \mathbb{R}^d , es decir, la distribución de $OX = \{Ou : u \in X\}$ es la misma que la de X para cualquier rotación O alrededor del origen.

Muchas veces los puntos llevan información extra unidos a ellos, conocida como marcas, pudiendo ser éstas variables aleatorias o no, pero no serán descritos en este trabajo. Para más detalle consulte Moller y Waagepetersen (2004).

2.4 PROCESOS PUNTUALES POISSON

Los procesos puntuales Poisson juegan un papel fundamental y sirven como una clase de modelos “Sin Interacción” o “Aleatoriedad Espacial Completa” en patrones puntuales espaciales. También sirven como procesos de referencia cuando se estudian estadísticas de resumen y cuando se construyen modelos más avanzados de procesos puntuales. Para más detalle consulte (Cox y Isham, 1980; Kingman, 1993). Así, un proceso puntual X en S , con función de intensidad $\rho: S \rightarrow [0, \infty)$ integrable localmente¹³ y medida de intensidad $\mu(B) = \int_B \rho(u)du$ localmente finita¹⁴, es de Poisson si para cada región acotada $B \subseteq S$ con $\mu(B) > 0$:

- a) $N(B) \sim Po(\mu(B))$, la distribución Poisson con media $\mu(B)$;
- b) Teniendo en cuenta $N(B)$, los puntos en X_B son i.i.d. con densidad proporcional a $\rho(u)$, es decir $f(u) = \rho(u)/\mu(B)$, donde $u \in B$.

y se escribe $X \sim Poisson(S, \rho)$.

Para cualquier $B \subseteq S$ acotado, μ determina el número esperado de puntos en B , es decir, $\mathbb{E}[N(B)] = \mu(B)$.

De la condición b) se tiene que la densidad condicional de n tuplas ordenadas artificialmente (x_1, \dots, x_n) dado $N(B) = n$ es $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i)/\mu(B)^n$. Mientras que de la condición a) $f(N(B) = n) = (e^{-\mu(B)}(\mu(B))^n)/n!$. Así de los postulados a) y b) la densidad conjunta de n y (x_1, \dots, x_n) está dado por:

$$\begin{aligned}
 f\{(x_1, \dots, x_n), n\} &= f(x_1, \dots, x_n)f(n) \\
 f\{(x_1, \dots, x_n), n\} &= \left\{ \frac{\prod_{i=1}^n \rho(x_i)}{\mu(B)^n} \right\} \left\{ \frac{e^{-\mu(B)}(\mu(B))^n}{n!} \right\} \\
 f\{(x_1, \dots, x_n), n\} &= \left\{ \frac{e^{-\mu(B)} \prod_{i=1}^n \rho(x_i)}{n!} \right\} \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

¹³ Esto es, $\int_B \rho(u)du < \infty$ para todo $B \subseteq S$

¹⁴ Esto es, $\mu(B) < \infty$ para todo $B \subseteq S$

Para más detalle consulte Cressie (1991).

Si ρ es constante, el proceso *Poisson* (S, ρ) se denomina proceso de Poisson homogéneo en S con ratio o intensidad ρ , de lo contrario se dice un proceso de Poisson no homogéneo sobre S . Por otra parte, el proceso *Poisson* $(S, 1)$ se llama proceso puntual de Poisson estándar o proceso Poisson de tasa unitaria sobre S .

Un proceso puntual Poisson homogéneo en \mathbb{R}^d es isotrópico y estacionario¹⁵ y $\rho^{-1/d}$ es un parámetro de escala, desde que $X \sim \text{Poisson}(\mathbb{R}^d, 1)$ implica que $\{\rho^{-1/d}u : u \in X\} \sim \text{Poisson}(\mathbb{R}^d, \rho)$.

Un proceso Poisson homogéneo, es conocido también como Aleatoriedad Espacial Completa (CSR, por sus siglas en inglés) y representa el tipo de proceso puntual en el que todos los eventos se distribuyen de forma independiente y de manera uniforme en la región S en la que se produce el proceso puntual. Esto significa que la ubicación de un punto no afecta las probabilidades de otros puntos que aparecen en las inmediaciones y que no hay regiones donde es más probable que aparezcan los eventos. Más formalmente Diggle (2014) describe un Proceso Poisson homogéneo como el cumplimiento de:

- a) Para algún $\rho > 0$ y una región plana finita B , el número de puntos $N(B)$ siguen una distribución Poisson con media $\mu = \rho|B|$.
- b) Dado que existen n puntos dentro de la región B , es decir, $N(B) = n$, las ubicaciones de estos puntos son *i.i.d.* de manera uniforme en el interior de A .
- c) El número de puntos $N(A)$ y $N(B)$ de dos regiones disjuntas A y B son variables aleatorias independientes.

De la condición b) se tiene que la densidad condicional de n tuplas ordenadas artificialmente (x_1, \dots, x_n) dado $N(B) = n$ es, $f(x_1, \dots, x_n) = 1/|B|^n$. Mientras que de la condición a) $f(N(B) = n) = (e^{-\mu}\mu^n)/n!$. Así de los postulados a) y b) la densidad conjunta de n y (x_1, \dots, x_n) está dado por:

$$f\{(x_1, \dots, x_n), n\} = f(x_1, \dots, x_n)f(n)$$

$$f\{(x_1, \dots, x_n), n\} = (1/|B|^n) (e^{-\mu}\mu^n)/n!$$

¹⁵ Bivand *et. al.* (2013) comenta, es estacionaria porque la intensidad es constante y la intensidad de segundo orden depende sólo de la relación de las posiciones de dos puntos (es decir, dirección y distancia). Es isotrópica porque la intensidad de segundo orden es invariante a la rotación. Por lo tanto, el proceso puntual tiene intensidad constante y su intensidad de segundo orden sólo depende la distancia entre dos puntos, independientemente de las posiciones relativas de los puntos.

$$f\{(x_1, \dots, x_n), n\} = (1/|B|^n) (e^{-\rho|B|} (\rho|B|)^n) / n!$$

$$f\{(x_1, \dots, x_n), n\} = \frac{\rho^n e^{-\rho|B|}}{n!} \quad (2.3)$$

Para más detalle consulte Cressie (1991).

Algunos ejemplos simulados de procesos puntuales de Poisson homogéneo y no homogéneo se muestran en la Figura 2.

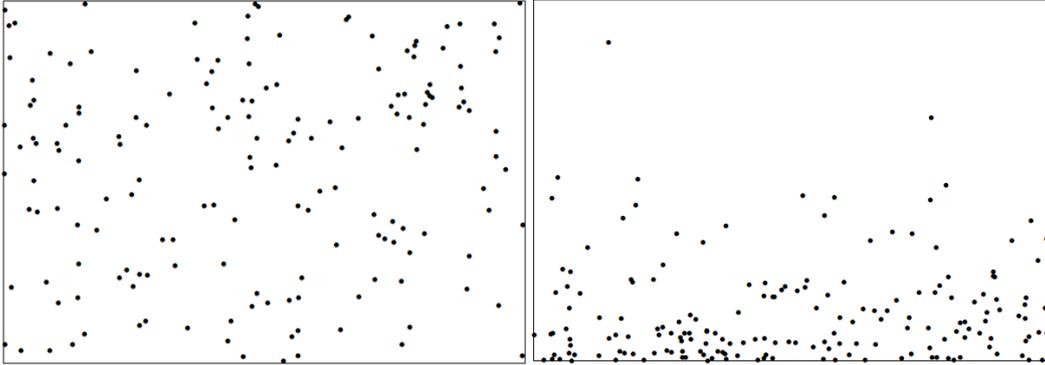


Fig. 2: Proceso puntual bidimensional Poisson homogéneo en el lado izquierdo y no homogéneo en el lado derecho (Moller y Waagepetersen, 2004).

2.4.1 PROPIEDADES

Las propiedades de existencia y dispersión independientes más importantes que cumple el proceso de Poisson se mencionan a continuación:

(i) $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$ si y sólo si para todo $B \subseteq S$ con $\mu(B) = \int_B \rho(u) du < \infty$ y todos los $F \subseteq N_{lf}$,

$$P(X_B \in F) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(B) = n) P(x \in F)$$

$$P(X_B \in F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu(B)}}{n!} \int_B \dots \int_B \mathbf{1}[x \in F] \rho(x_1) \dots \rho(x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (2.4)$$

Donde $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, y la integral para $n = 0$ se lee como $\mathbf{1}[\emptyset \in F]$.

(ii) Si $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$, entonces para funciones $h : N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$ y $B \subseteq S$ con $\mu(B) < \infty$,

$$\mathbb{E}[h(X_B)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu(B)}}{n!} \int_B \dots \int_B h(\{x_1, \dots, x_n\}) \rho(x_1) \dots \rho(x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Muchas veces en la literatura esta propiedad es reemplazada por la condición que $N(B_1), \dots, N(B_n)$ son independientes para conjuntos disjuntos $B_1, \dots, B_n \subseteq S$ y $n \geq 2$. Esta propiedad es llamada *dispersión independiente* (*independent scattering*).

(iii) $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$ existe y está determinada únicamente por sus probabilidades nulas $v(B) = P(N(B) = 0) = \frac{\exp(-\mu(B))\mu(B)^0}{0!} = \exp(-\mu(B))$, acotado $B \subseteq S$. Esta es la probabilidad nula para un proceso de Poisson con la medida de intensidad μ .

(iv) Si X es un proceso de Poisson en S , entonces X_{B_1}, X_{B_2}, \dots son independientes para conjuntos disjuntos $B_1, B_2, \dots \subseteq S$. Esto explica la terminología de *no interacción* y *aleatoriedad espacial completa* en el proceso de Poisson. Por otro lado

$$\rho^{(n)}(u_1, \dots, u_n) = \rho(u_1) \dots \rho(u_n)$$

refleja la no interacción. Estacionariedad significa que $\rho(u)$ es constante e implica isotropía de X .

Para verificar las pruebas de las propiedades anteriores consulte Moller y Waagepetersen (2004).

2.4.2 OPERACIONES ENTRE PROCESOS PUNTUALES

La Superposición y Adelgazamiento (*Superpositioning and Thinning*) constituyen las dos operaciones básicas para procesos puntuales.

Una superposición se define como la unión disjunta $\cup_{i=1}^{\infty} X_i$ de procesos puntuales $X_1, X_2, \dots, .$

Si $X_i \sim \text{Poisson}(S, \rho_i)$, $i = 1, 2, \dots$ son independientes entre sí y $\rho = \sum \rho_i$ es localmente integrable, entonces con probabilidad uno, $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$ es una unión disjunta, y $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$.

Sea la función $p: S \rightarrow [0, 1]$ y X un proceso puntual en S . El proceso puntual $X_{thin} \subseteq X$ obtenido por inclusión $u \in X$ en X_{thin} con probabilidad $p(u)$, donde los puntos son incluidos/excluidos de forma independiente el uno del otro, se dice que es un *adelgazamiento independiente* de X con probabilidades de retención $p(u)$, $u \in S$. Formalmente, podemos establecer

$$X_{thin} = \{u \in X: R(u) \leq p(u)\}$$

donde $R(u) \sim \text{Uniforme}[0,1]$, $u \in S$, son mutuamente independientes e independiente de X .

Los procesos de Poisson son cerrados tanto bajo superposición y adelgazamiento independiente, es decir, supóngase que $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$ está sujeto a un *adelgazamiento independiente* con probabilidades de retención $p(u)$, $u \in S$, y $\rho_{thin}(u) = p(u)\rho(u)$, $u \in S$. Entonces X_{thin} y $X \setminus X_{thin}$ son procesos Poisson independientes con funciones de intensidad ρ_{thin} y $\rho - \rho_{thin}$, respectivamente. Para más detalle consulte la sección 3.2.2 de Moller y Waagepetersen (2004).

2.4.3 DENSIDADES PARA LOS PROCESOS DE POISSON

Si X_1 y X_2 son dos procesos puntuales definidos sobre un mismo espacio S , entonces X_1 es *absolutamente continua con respecto a* X_2 (o más precisamente la distribución de X_1 es absolutamente continua con respecto a la distribución de X_2) si y sólo si $P(X_2 \in F) = 0$ implica que $P(X_1 \in F) = 0$ para $F \subseteq N_{lf}$. De manera equivalente, por el teorema de Radon-Nikodym (Billingsley, 1995), existe una función $f: N_{lf} \rightarrow [0, \infty]$ de modo que

$$P(X_1 \in F) = \mathbb{E}[\mathbf{1}[X_2 \in F]f(X_2)], F \subseteq N_{lf}$$

llamaremos f a la densidad para X_1 con respecto a X_2 .

Las siguientes proposiciones muestran que los procesos de Poisson no son siempre absolutamente continuos con respecto a cualquier otro; pero son siempre absolutamente continuos con respecto al *proceso de Poisson estándar* si consideramos S acotada.

- (i) Para cualquier número $\rho_1 > 0$ y $\rho_2 > 0$, Poisson (\mathbb{R}^d, ρ_1) es absolutamente continua con respecto a Poisson (\mathbb{R}^d, ρ_2) si y sólo si $\rho_1 = \rho_2$.
- (ii) Para $i = 1, 2$, supóngase que $\rho_i: S \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\mu_i(S) = \int_S \rho_i(u) du$ es finito, y que $\rho_2(u) > 0$ siempre que $\rho_1(u) > 0$. Entonces Poisson (S, ρ_1) es absolutamente continua con respecto a Poisson (S, ρ_2) , con densidad

$$f(x) = \exp(\mu_2(S) - \mu_1(S)) \prod_{u \in x} \rho_1(u)/\rho_2(u) \quad (2.5)$$

para configuraciones puntuales finitas $x \subset S$ (teniendo en cuenta que $0/0 = 0$). Para más detalle consulte la sección 3.2.4 de Moller y Waagepetersen (2004).

2.5 ESTADÍSTICAS DE RESUMEN

Las estadísticas de resumen más utilizadas en el caso homogéneo y no homogéneo están basadas principalmente en las características que describen las propiedades de primer y segundo orden de un proceso puntual, en particular la intensidad y las funciones de correlación por pares y las medidas de momentos de segundo orden reducidas. Además las propiedades de segundo orden (como la llamada funciones - L y K , pasando por el caso anisotrópico¹⁶) y estadísticas de resumen basadas en las distancias entre puntos (como las funciones F , G y J).

Las estadísticas de resumen de primer orden para un proceso puntual, son análogos a la media comúnmente conocida, en el caso no espacial, en el sentido de que estos describen la densidad o intensidad en términos del número promedio de puntos por unidad de área. En cambio las características de segundo orden se relacionan con la posición relativa de los puntos o la interacción entre estos. Más material sobre estadísticas de resumen se puede encontrar en Stoyan y Stoyan (1994), Moller y Waagepetersen (2004) y las referencias en estas.

2.5.1 PROPIEDADES DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

Si el número de puntos en alguna región se considera como una variable aleatoria, entonces la medida momento factorial de esta región es el momento factorial de esta variable aleatoria. De manera general, para un proceso puntual X en $S \subseteq \mathbb{R}^2$ los *momentos de primer orden* y *segundo orden* para las variables de conteos $N(B)$, $B \subseteq S$, pueden ser expresados por las siguientes medidas:

a) La medida de la intensidad

La *medida del momento factorial de primer orden* de un proceso puntual coincide con la medida de su primer momento o medida de intensidad, que da el número esperado o promedio de puntos del proceso puntual situado en alguna región del espacio. Así la medida de intensidad μ en \mathbb{R}^d está dada por:

¹⁶ Hace referencia a lo opuesto de isotrópico, es decir, cuando la intensidad de segundo orden varía ante rotaciones.

$$\mu(B) = \mathbb{E}[N(B)], \quad B \subseteq \mathbb{R}^2$$

En la práctica la estructura de la media es modelada en términos de una función de intensidad no negativa ρ

$$\mu(B) = \int_B \rho(u) du, \quad B \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (2.6)$$

Si ρ es constante, entonces X se dice que es homogénea o estacionaria de primer orden con intensidad ρ , de lo contrario X se dice que es no homogénea. $\rho(u)du$ es la probabilidad de la ocurrencia de un punto en una región infinitesimalmente pequeña que contiene la ubicación u y de área du . Para un proceso puntual homogéneo, ρ es el número medio de puntos por unidad de área o volumen para un espacio de más de 2 dimensiones.

b) Medida del momento factorial de segundo orden

La medida del momento factorial de segundo orden $\mu^{(2)}$ en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, está dado por:

$$\mu^{(2)}(A) = \mathbb{E} \sum_{u,v \in X}^{\neq} \mathbf{1}[(u, v) \in A], \quad A \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad (2.7)$$

donde el signo \neq encima de la sumatoria significa que los puntos u, v en X son pares distintos y $\mathbf{1}[\cdot]$ es la función indicadora¹⁷.

De esta forma, el momento de segundo orden (la estructura de covarianza¹⁸) de las variables de conteo $N(B)$ y $N(C)$ para dos regiones acotadas $B, C \subseteq \mathbb{R}^2$, se define a partir de (2.7) y de la medida de intensidad, así:

$$\mathbb{E}[N(B)N(C)] = \mu^{(2)}(B \times C) + \mu(B \cap C) \quad (2.8)$$

Para muchas clases de modelos importantes, $\mu^{(2)}$ definida en (2.7) es dada en términos de una función no negativa llamada la *densidad producto de segundo orden* $\rho^{(2)}$:

¹⁷ Toma valores de 1: cuando el elemento es parte del conjunto y 0: cuando es parte del complemento de un conjunto.

¹⁸ La varianza de una variable de conteo $N(B)$ está dada por: $varN(B) = \mathbb{E}[N(B)^2] - [\mathbb{E}N(B)]^2$ y la covarianza de dos conteos: $cov[N(B_1), N(B_2)] = \mathbb{E}[N(B_1)N(B_2)] - \mathbb{E}[N(B_1)]\mathbb{E}[N(B_2)]$. Una observación clave es que el producto $N(B_1)N(B_2)$ es igual al número de pares ordenados (u, v) de puntos en el proceso X tal que $u \in B_1$ y $v \in B_2$.

$$\mu^{(2)}(A) = \int \mathbf{1}[(u, v) \in A] \rho^{(2)}(u, v) dudv \quad (2.9)$$

donde $\rho^{(2)}(u, v)dudv$ es la probabilidad de observar un par de puntos de X que ocurren de forma conjunta en dos regiones de áreas infinitesimalmente pequeñas du y dv que contienen los puntos u y v respectivamente.

Las *medidas de momento factorial* de cualquier orden son descritas en el Apéndice C de Moller y Waagepetersen (2004).

c) Función de correlación por pares

Con el fin de estudiar, si un proceso puntual se desvía de un proceso Poisson, es útil normalizar la densidad producto de segundo orden $\rho^{(2)}(u, v)$ dividiendo por $\rho(u) \rho(v)$.

Si ρ y $\rho^{(2)}$ existen, entonces la función de correlación par es definida por:

$$g(u, v) = \frac{\rho^{(2)}(u, v)}{\rho(u) \rho(v)} \quad (2.10)$$

siempre y cuando $\rho(u) > 0$, $\rho(v) > 0$. Si los puntos son independientes unos de otros $\rho^{(2)}(u, v) = \rho(u)\rho(v)$ de modo que $g(u, v) = 1$ (este es el caso del proceso Poisson).

Si $g(u, v) > 1$, podemos interpretar esto como atracción entre puntos del proceso en lugares u y v (clústeres), mientras que si $g(u, v) < 1$ tenemos repulsión en los dos lugares (regularidad).

Si X es estacionario, g se convierte en traslación invariante, es decir, $g(u, v) = g(u - v)$. Pero existen casos en los que g es traslación invariante pero ρ es no homogénea. La traslación invariante $g(u, v) = g(u - v)$ de g implica que X es un proceso puntual con *intensidad de segundo orden estacionario reponderado* y en aplicaciones a menudo se supone que $g(u, v) = g(\|u - v\|)$, es decir, que g depende sólo de la distancia $\|u - v\|$. Tenga en cuenta que diferentes modelos de procesos puntuales pueden compartir la misma función g . Para más detalle consulte Moller y Waagepetersen (2007).

d) La medida de segundo orden reducido

Supóngase que X tiene función de intensidad ρ . Las propiedades de segundo orden se describen por la función g de correlación por pares.

En el caso que la función de correlación par g existe y $g(u, v) = g(u - v)$ es invariante a traslaciones, entonces la *medida del momento de segundo orden reducido no homogénea* (Baddeley et al., 2000)

$$\mathcal{K}(B) = \int_B g(u) du, B \subseteq \mathbb{R}^d \quad (2.11)$$

Mas generalmente, supóngase que g no existe (es decir, no se asume traslación invariante), podemos definir la medida del momento factorial de segundo orden expresado en términos de la función de intensidad y la siguiente medida \mathcal{K} en \mathbb{R}^d :

$$\mathcal{K}(B) = \frac{1}{|A|} \mathbb{E} \left[\sum_{u, v \in X}^{\neq} \frac{\mathbf{1}[u \in A, v - u \in B]}{\rho(u) \rho(v)} \right], B \subseteq \mathbb{R}^d \quad (2.12)$$

y no depende de la elección de $A \subseteq \mathbb{R}^d$ con $0 < |A| < \infty$, considerando $a/0 = 0$ para $a \geq 0$. Entonces X se dice que es *un proceso puntual con intensidad-reponderada de segundo-orden estacionario* y \mathcal{K} se llama la *medida del momento de segundo orden reducido*.

En el caso estacionario $\rho\mathcal{K}(B)$ puede interpretarse como la esperanza condicional del número de puntos adicionales en B dado que X tiene un punto en el origen.

e) Funciones - K, L

En las aplicaciones se consideran las estimaciones de $\mathcal{K}(B)$ para una clase de conjuntos B tales como bolas. Una bola cerrada en S con centro $u \in S$ y radio $r \geq 0$, cuando $S \subseteq \mathbb{R}^d$ y $d(u, v) = \|u - v\|$ es la distancia euclidiana habitual, está dada por:

$$b(u, r) = \{v \in S: d(u, v) \leq r\}$$

Así una definición más general de la función - K de Ripley¹⁹ (para el caso estacionario) ha sido propuesto por Baddeley et al. (2000) para el caso no homogéneo.

Para un *proceso puntual de segundo orden reponderada estacionaria*²⁰, las funciones K y L no homogéneo, han sido definido por:

¹⁹ Para más detalle consulte el anexo 2.

²⁰ Cuando la intensidad de segundo - orden reponderado-estacionaria.

$$K(r) = \mathcal{K}(b(0, r)) = \frac{1}{|A|} \mathbb{E} \left[\sum_{u, v \in X}^{\neq} \frac{\mathbf{1}[\|u - v\| \leq r]}{\rho(u) \rho(v)} \right], B \subseteq \mathbb{R}^d \quad (2.13)$$

y

$$L(r) = (K(r) / \omega_d)^{1/d} \quad (2.14)$$

donde $r > 0$ y $\omega_d = (\pi^{d/2})/\Gamma(1 + d/2)$: representan el radio y el volumen de una bola unitaria d-dimensional, respectivamente. Así para el caso bidimensional ($d = 2$):

$$L(r) = \sqrt{K(r)/\pi} \quad (2.15)$$

En el caso estacionario, $\rho K(r)$, es el número esperado de otros puntos dentro de la distancia r desde el origen dado que X tiene un punto en el origen.

La función - K y la función - L están en correspondencia uno-a-uno, y en aplicaciones la función - L se utiliza a menudo en lugar de la función - K . Una razón es que L es la identidad de un proceso de Poisson. Los valores teóricos para las funciones K , L y g de un proceso Poisson homogéneo, son descritos en el Cuadro 1. Para más detalle consulte el Anexo 2, Illian et al. (2008) y Baddeley et al. (2016).

Cuadro 1: Funciones K y L teóricas para el proceso Poisson homogéneo

Función	Fórmula teórica (d)	Fórmula teórica ($d = 2$)
Función - $K(r)$	$K(r) = \omega_d r^d$	$K(r) = \pi r^2$
Función - $L(r)$	$L(r) = r$	$L(r) = r$
Función de correlación par $g(r)$	$g(r) = 1$	$g(r) = 1$

Fuente: Illian et al. (2008). r es la distancia interpuntos y $\omega_d = (\pi^{d/2})/\Gamma(1 + d/2)$.

En general, al menos para valores pequeños de r , $L(r) - r > 0$ indica agregación o clustering en distancias menores de r , y $L(r) - r < 0$ indica regularidad a distancias inferiores a r .

Si \mathcal{K} es invariante bajo rotaciones, entonces \mathcal{K} está determinado por K . Este es el caso si X es isotrópico, o si $g(u, v) = g(\|u - v\|)$ es isotrópico. Si g es isotrópico, entonces por (2.11), $K(r) = \sigma_d \int_0^r t^{d-1} g(t) dt$, i.e., g también es una función que describe como la función de correlación par depende de la distancia interpuntos. Esto demuestra la estrecha relación entre K y g . A menudo son más usados la función - L o K en lugar de g ,

posiblemente debido a que es más simple para estimar K que g . Sin embargo, desde que K es una función acumulativa, por lo general es más fácil interpretar un gráfico de g que un gráfico de K .

En general, al menos para pequeños valores de r , $g(r) > 1$ indica agregación o clustering a distancias r , y $g(r) < 1$ regularidad a tales distancias. Hay que hacer notar que muchos modelos diferentes de procesos puntuales pueden compartir la misma función K . Para más detalle consulte Baddeley y Silverman (1984), Baddeley et al. (2000) y Moller y Waagepetersen (2004).

2.5.2 ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA

Considere un proceso puntual espacial X en \mathbb{R}^d con función de intensidad ρ y supóngase que ha sido posible observar un único patrón puntual $X_W = x$ en una ventana acotada $W \subset \mathbb{R}^d$ con $|W| > 0$.

a) Intensidad

En el caso homogéneo, una estimación insesgada natural de la intensidad y que coincide con la estimación de máxima verosimilitud²¹, si X es un Proceso Poisson homogéneo, es:

$$\hat{\rho} = n(x)/|W| \quad (2.16)$$

En el caso no homogéneo, un estimado kernel (no paramétrico) de la función de intensidad es:

$$\hat{\rho}_b(u) = \sum_{v \in x} k_b(u - v) / c_{W,b(v)}, u \in W \quad (2.17)$$

donde k_b es un kernel con un ancho de banda $b > 0$, es decir $k_b(u) = k(u/b)/b^d$ donde k es una función de densidad dada, y $c_{W,b(v)} = \int_W k_b(u - v) du$ es un factor de corrección de borde. Esta estimación es generalmente sensible a la elección de b (ancho de la banda o radio). Cabe mencionar también que el estimado kernel de la intensidad es la misma que el estimador de la función de densidad kernel multivariado exceptuando en el denominador la cantidad de puntos observados (n)

²¹ Consulte la sección 2.6.1.

Moller y Waagepetersen (2004) cuando $d \geq 2$, utilizaron un kernel producto dado por $k(u) = \prod_{i=1}^d k(u/b)_i$, así cuando $d = 2$ el kernel es: $k(u) = e(u_1)e(u_2)$, para $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $e(t)$ es el kernel Epanechnikov univariado. Demuestran también que $\int_W \hat{\rho}_b(u) du$ es una estimación insesgada de $\mu(W)$.

Otras alternativas para las funciones kernel univariadas se muestran en el Cuadro 2 y son descritas en Silverman (1986) y Hardle et al. (2004).

Cuadro 2: Funciones de kernel univariado

Kernel	$k(t)$
Epanechnikov	$(3/4)(1 - t^2)\mathbf{1}[t \leq 1]$
Cuártico (Biweight)	$(15/16)(1 - t^2)^2\mathbf{1}[t \leq 1]$
Triweight	$(35/32)(1 - t^2)^3\mathbf{1}[t \leq 1]$
Triangular	$(1 - t)\mathbf{1}[t \leq 1]$
Gaussiano	$(1/\sqrt{2\pi})\exp(-t^2/2)$
Uniforme	$(1/2)\mathbf{1}[t \leq 1]$
Coseno	$\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathbf{1}[t \leq 1]$

Fuente: Hardle et al. (2004).

El kernel multivariado cuando $d \geq 2$, tiene contornos que son por lo general simétricos, lo cual no ocurre con el kernel producto, para más detalle consulte Hardle et al. (2004). Las funciones de kernel multivariadas más conocidas para el caso bidimensional ($d = 2$), han sido descritas en Silverman (1986) y se muestran en el Cuadro 3, donde $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ representa un vector bidimensional.

Cuadro 3: Funciones de kernel bivariado

Kernel	$k(u)$
Normal estándar	$k(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi} e^{-0.5 \mathbf{u}^T \mathbf{u}}$
Cuártico (Biweight)	$k(\mathbf{u}) = \frac{3}{\pi} (1 - \mathbf{u}^T \mathbf{u})^2 \mathbf{1}[\mathbf{u}^T \mathbf{u} < 1]$
Epanechnikov	$k(\mathbf{u}) = \frac{2}{\pi} (1 - \mathbf{u}^T \mathbf{u}) \mathbf{1}[\mathbf{u}^T \mathbf{u} < 1]$

Fuente: Silverman (1986).

En el caso del kernel Normal estándar bivariado, el kernel producto coincide con el kernel multivariado, ya que $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$, este puede ser expresado como un *kernel producto* de caso univariado, Así:

$$k(\mathbf{u}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5u_1^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5u_2^2} \right)$$

Se menciona a continuación una expresión matricial para el cálculo de la función de intensidad a través del kernel producto para el caso bidimensional. Considere el caso más simple donde W es de forma rectangular y sin considerar los efectos de borde, es decir, se asume que el proceso puntual X se da solo en W . Supóngase que $\mathbf{X} = [x_1^T, \dots, x_n^T]^T$ es la matriz de dimensión $n \times d$ de todas las coordenadas de los puntos del patrón puntual observado y un *grid rectangular* de puntos $U = \{u_1, \dots, u_N\}$ en W , igual al producto cartesiano de: $U^{(1)} = \{\text{long}_1, \dots, \text{long}_k\}$ y $U^{(2)} = \{\text{lat}_1, \dots, \text{lat}_m\}$, cuyos elementos están ordenados e igualmente espaciados y $N = k \times m$. La representación vectorial de $U^{(1)}$ y $U^{(2)}$ lo denotaremos por: $\mathbf{U}^{(1)} = [\text{long}_1, \dots, \text{long}_k]^T$ y $\mathbf{U}^{(2)} = [\text{lat}_1, \dots, \text{lat}_m]^T$, entonces una expresión matricial para la intensidad kernel producto, es:

$$\hat{\rho}_b(\mathbf{U}) = \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2^T / b^2 \quad (2.18)$$

donde: $\mathbf{K}_1 = k \left(\left(\mathbf{U}^{(1)} \mathbf{1}_{1n} - \mathbf{1}_{k1} (\mathbf{X}^{(1)})^T \right) / b \right)$ y $\mathbf{K}_2 = k \left(\left(\mathbf{U}^{(2)} \mathbf{1}_{1n} - \mathbf{1}_{m1} (\mathbf{X}^{(2)})^T \right) / b \right)$, $\mathbf{1}_{1n}$ es una matriz de unos de dimensión $(1 \times n)$ de la misma forma para k y m , n es la cantidad de puntos del patrón puntual, N es la cantidad de puntos para los cuales se estimará la intensidad, $\mathbf{X}^{(1)}$ representa la primera columna de la matriz \mathbf{X} , $k(\mathbf{U}_0)$ es la función kernel univariado aplicada a cada elemento de la matriz \mathbf{U}_0 y b es el tamaño de la banda de suavizado. Note que la intensidad estimada es una matriz de dimensión $k \times m$ y puede ser representada computacionalmente en forma de imagen de $k \times m$ pixeles.

Por otro lado, en el caso de las intensidades obtenidas a partir de los kernel con radio de búsqueda limitado, por ejemplo el kernel de Epanenickov y cuártico, son descritos a detalle en Silverman (1986).

b) Funciones K y L

Para la estimación no paramétrica de K , considere $W_u = \{v + u : v \in W\}$ una traslación de W por $u \in \mathbb{R}^d$.

Supóngase que $|W \cap W_u| > 0$ para todo $u \in B$, y que X es un proceso puntual con intensidad de segundo orden reponderado estacionaria. Entonces una estimación insesgada de $K(B)$ es:

$$\hat{K}(B) = \sum_{u,v \in x}^{\neq} \frac{\mathbf{1}[v - u \in B]}{\rho(u)\rho(v)|W \cap W_{v-u}|} \quad (2.19)$$

En la práctica no se conoce ρ , por lo que $\rho(u)\rho(v)$ debe ser reemplazado por un estimado $\widehat{\rho(u)\rho(v)}$ en (2.19). Entonces:

$$\hat{K}(B) = \sum_{u,v \in x}^{\neq} \frac{\mathbf{1}[v - u \in B]}{\widehat{\rho(u)\rho(v)} |W \cap W_{v-u}|} \quad (2.20)$$

es sesgada.

La condición de B implica que si por ejemplo, $B = b(0, r)$ y W es rectangular, se requiere que r sea menor que el lado más pequeño en W . La condición puede ser debilitada por ejemplo, si existe la correlación par, ya que basta con suponer que $|\{u \in B: |W \cap W_u| = 0\}| = 0$. La estimación de $L(r)$ se obtiene a partir de la transformación de $K(r)$ y es en general también sesgada, así $\hat{L}(r) = \sqrt{\hat{K}(r)/\pi}$.

El insesgamiento es generalmente imposible de obtener para muchos estimadores en estadística espacial, pero en su lugar se usan a menudo ratios insesgados de la forma $\hat{\theta} = Y/Z$ donde $\theta = \mathbb{E}Y / \mathbb{E}Z$. Por ejemplo, en el caso homogéneo, si $\widehat{\rho(u)\rho(v)} = \widehat{\rho^2}$ es insesgado, entonces (2.20) es un ratio insesgado. Stoyan y Stoyan (2000) discuten diversas posibilidades para el caso homogéneo: una posibilidad es transformar la estimación de la intensidad para obtener $n(x)^2/|W|^2$ como una estimación de ρ^2 ; una alternativa es:

$$\widehat{\rho^2} = n(x)(n(x) - 1) / |W|^2 \quad (2.21)$$

que es insesgado para un proceso de Poisson. Para el caso no homogéneo, Baddeley et al. (2000) proponen utilizar $\widehat{\rho(u)\rho(v)} = \bar{\rho}_b(u) \bar{\rho}_b(v)$ donde:

$$\bar{\rho}_b(u) = \sum_{v \in x \setminus u} k_b(u - v) / c_{W, b(v)}, u \in W \quad (2.22)$$

es una ligera modificación de (2.17). Baddeley et al. (2000) muestran que para un proceso de Poisson no homogéneo, $\bar{\rho}_b(u)$ es menos sesgada que $\hat{\rho}_b(u)$ cuando $u \in x$ es un punto

de datos. Ellos argumentan que es también el caso de un proceso puntual con función de correlación par $g \geq 1$, mientras que el panorama es menos claro si $g \leq 1$.

El peso de $1/|W \cap W_{v-u}|$ en (2.19) y (2.20) es un factor de corrección de borde. Otros numerosos factores de corrección de borde y el cálculo de intervalos de confianza para la estadística de resumen $L(r)$ para cada valor de r han sido descritos en las secciones 4.3.3 y 4.3.4 de Moller y Waagepetersen (2004).

c) Función - g

Para la estimación de la función de correlación par, asuma por conveniencia que $g(u, v) = g(\|u - v\|)$ es isotrópica. Podemos expresar g en términos de la derivada K' de K , pero ya que \hat{K} suele ser una función escalonada, no es fácil estimar K' de \hat{K} .

Una forma popular de estimar la función de correlación par, es a través del método kernel suavizado con corrección de borde (Stoyan y Stoyan, 1994; Baddeley et al., 2000), dada por :

$$\hat{g}(r) = \frac{1}{\sigma_d r^{d-1} |W|} \sum_{u,v \in x}^{\neq} \frac{k_b(r - \|v - u\|)}{\rho(u)\rho(v)|W \cap W_{v-u}|} \quad (2.23)$$

Para el caso bidimensional

$$\hat{g}(r) = \frac{1}{2\pi r |W|} \sum_{u,v \in x}^{\neq} \frac{k_b(r - \|v - u\|)}{\rho(u)\rho(v)|W \cap W_{v-u}|} \quad (2.24)$$

donde $\sigma_d = 2\pi^{\frac{d}{2}}/\Gamma(d/2)$, $k_b(x) = k(x/b)/b$, $x \in \mathbb{R}$, para un kernel $k(\cdot)$ y el ancho de banda $b > 0$, y se asume que $|W \cap W_u| > 0$ para $\|u\| \leq r$ (en efecto de nuevo se puede utilizar la condición más débil con $B = b(0, r)$). El kernel $k(\cdot)$ puede ser el kernel uniforme $k(x) = 1[|x| < 1/2]$ o el kernel Epanechnikov, descritos en el Cuadro 2. Los estudios de simulación y cálculos aproximados de la varianza del estimador (Stoyan y Stoyan, 2000) muestran que con el kernel uniforme se obtiene la varianza más pequeña para un determinado b . La estimación de \hat{g} es sensible a la elección del ancho de banda $b > 0$, y es sesgado hacia arriba para distancias pequeñas de r , véase la discusión en Stoyan y Stoyan (1994).

En el caso homogéneo, tomando cualquier estimador de corrección de borde para la función K de la forma general, suponga que se reemplaza el indicador $\mathbf{1}[d_{ij} \leq r]$ por un término kernel $k(d_{ij} - r)$ para obtener un estimado suavizado de $K'(r)$, entonces para un ancho de banda fijo el estimador kernel:

$$\hat{g}(r) = \frac{|W|}{2\pi r n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n k_h(r - d_{ij}) e_{ij}(r)$$

donde $d_{ij} = \|x_i - x_j\|$ es la distancia del punto i y j del patrón puntual, $e_{ij}(r)$ es un ponderador de corrección de borde y k_h es el kernel suavizado, con ventana de suavizado $h > 0$. El kernel $k_h(x) = (1/h)k(x/h)$. La elección usual del kernel suavizado para la función de correlación par es el kernel Epanechnikov. Una forma para elegir h , es a través de la regla de thumb $h = c/\sqrt{\rho}$, donde $0.1 \leq c \leq 0.2$. Particularmente Stoyan y Stoyan (1994) usaron $c = 0.15$ basándose en simulaciones y experiencia práctica cuando $d = 2$ y $50 \leq n(x) \leq 300$ (Baddeley et al., 2016).

2.5.3 ESTADÍSTICAS DE RESUMEN BASADA EN LAS DISTANCIAS ENTRE PUNTOS

Muchos tipos de distancias entre pares de puntos pueden ser medidos en un patrón puntual. Supóngase que X es estacionario y en base a las distancias entre puntos, se construyen tres estadísticas de resumen:

- a) **La función – F de espacio vacío**, conocida también como “Función de distribución de contacto esférico”. Es la función de distribución de la distancia desde el origen (u otro punto fijo en \mathbb{R}^d) hasta el punto más cercano en X , es decir,

$$F(r) = P(X \cap b(0, r) \neq \emptyset), r > 0 \quad (2.25)$$

- b) **La función – G** , conocida también como “Función al vecino más cercano”, es:

$$G(r) = \frac{1}{\rho |A|} \mathbb{E} \sum_{u \in X \cap A} \mathbf{1}[(X \setminus u) \cap b(u, r) \neq \emptyset], r > 0 \quad (2.26)$$

para un conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{R}^d$ con $0 < |A| < \infty$. Como su nombre lo indica, G puede ser interpretado como la función de distribución de la distancia desde un punto típico en X hasta el vecino más cercano en X y

c) **La función** J , propuesta por Lieshout y Baddeley (1996), se define por:

$$J(r) = (1 - G(r)) / (1 - F(r)) \text{ para } F(r) < 1 \quad (2.27)$$

Para un proceso Poisson estacionario en \mathbb{R}^d con intensidad $\rho < \infty$, las expresiones teóricas para las funciones F, G y J están dadas en forma explícita²² en el Cuadro 4. Para más detalle consulte Moller y Waagepetersen (2004) y Illian et al. (2008).

Cuadro 4: Funciones F, G y J teóricas para el proceso Poisson homogéneo

Función	Fórmula teórica (d)	Fórmula teórica ($d = 2$)
Función - $F(r)$	$F(r) = 1 - \exp(-\rho\omega_d r^d)$	$F(r) = 1 - \exp\{-\rho\pi r^2\}$
Función - $G(r)$	$G(r) = F(r)$	$G(r) = 1 - \exp\{-\rho\pi r^2\}$
Función - $J(r)$	$J(r) = 1$	$J(r) = 1$

Fuente: Illian et al. (2008). r es la distancia interpuntos y $\omega_d = (\pi^{d/2})/\Gamma(1 + d/2)$

En general, al menos para valores pequeños de $r > 0$, $F(r) < G(r)$ (o $J(r) < 1$) indica agregación o clustering, y $F(r) > G(r)$ (o $J(r) > 1$) regularidad. Bedford y Berg (1997) muestran que $J = 1$ no implica que X es un proceso de Poisson estacionario. No es obvio cómo ampliar las definiciones de F, G , y J para la caso no estacionario.

2.5.4 ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA DE LAS FUNCIONES - F, G, y J

Los estimadores de Muestras Reducidas (*RS*, por sus siglas en ingles) de F y G se obtienen fácilmente utilizando *minus sampling*. Sea $d(u, B) = \inf\{\|u - v\|: v \in B\}$ la distancia más corta desde un punto $u \in \mathbb{R}^d$ a un conjunto $B \subset \mathbb{R}^d$. Sea $I \subset W$ que denota un grid regular finito de puntos (elegido de forma independiente de X), y sea $\#I_r$ la cardinalidad del conjunto $I_r = I \cap W_{\ominus r}$ para $r > 0$. Entonces la estimación insesgada:

$$\hat{F}_{RS}(r) = \sum_{u \in I_r} \mathbf{1}[d(u, x) \leq r] / \#I_r \quad (2.28)$$

para $\#I_r > 0$, y el ratio - insesgado estimado

$$\hat{G}_{RS}(r) = \sum_{u \in x \cap W_{\ominus r}} \frac{\mathbf{1}[d(u, x \setminus u) \leq r]}{(\hat{\rho} |W_{\ominus r}|)} \quad (2.29)$$

²² Para otro tipo de modelos, las expresiones de forma explícita de F, G, J son poco conocido.

$$\hat{G}_{RS}(r) = \sum_{u \in x \cap W_{\Theta r}} \frac{\mathbf{1}[d(u, x \setminus u) \leq r]}{(\hat{\rho}|W_{\Theta r}|)} \quad (2.29)$$

para $|W_{\Theta r}| > 0$.

La compatibilidad con un patrón puntual CRS puede ser evaluada por el trazado de la función empírica $\hat{G}(r)$ en contra del esperado teórico.

Otras estimaciones más eficientes de las funciones F y G son los llamados estimados de Kaplan-Meier, propuestos por Baddeley y Gill (1997):

$$\hat{F}_{KM}(r) = 1 - \prod_{s \leq r} \left(1 - \frac{\#\{u \in I: d(u, x) = s, d(u, x) \leq d(u, \partial W)\}}{\#\{u \in I: d(u, x) \geq s, d(u, \partial W) \geq s\}}\right) \quad (2.30)$$

y

$$\hat{G}_{KM}(r) = 1 - \prod_{s \leq r} \left(1 - \frac{\#\{u \in x: d(u, x \setminus u) = s, d(u, x \setminus u) \leq d(u, \partial W)\}}{\#\{u \in x: d(u, x \setminus u) \geq s, d(u, \partial W) \geq s\}}\right) \quad (2.31)$$

para $r > 0$, considerando $0/0 = 0$. Baddeley y Gill (1997) también consideran un estimador Kaplan-Meier para $K(r)$, y concluyen que es mejor que la estimación de la muestra - reducida, pero que las estimaciones utilizando los factores de corrección de borde son incluso mejores.

Dado los estimados $\hat{F}(r)$ y $\hat{G}(r)$, se obtiene:

$$\hat{J}(r) = (1 - \hat{G}(r))/(1 - \hat{F}(r)) \quad (2.32)$$

para $\hat{F}(r) < 1$. La varianza de $\hat{J}(r)$ aumenta considerablemente a medida que aumenta r .

2.5.5 PRUEBAS DE CONTEO POR CUADRANTE PARA CSR

Si se sospecha que la intensidad no es homogénea, otra alternativa no paramétrica a la estimación kernel, es el método de conteo por cuadrantes. En un proceso puntual Poisson homogéneo se esperaría que las regiones de igual área tengan aproximadamente igual número de puntos. El método consiste en dividir la ventana de observación W en subregiones denominadas cuadrantes, B_1, \dots, B_m de área a_1, \dots, a_m (por simplicidad suponga que son de la misma área) respectivamente tal que $B_1 \cup \dots \cup B_m = W$. Contamos el número de puntos que caen en cada cuadrado, $n_j = n(X \cap B_j)$ para $j = 1, \dots, m$. Desde

que los conteos son estimadores insesgados de los correspondientes valores esperados $\mathbb{E}[n(X \cap B_j)]$, estos podrían ser iguales en promedio si la intensidad es homogénea. Cualquier tendencia espacial aparente en los conteos n_j sugiere que la intensidad es no homogénea. Si los conteos n_j son divididos por su correspondiente área, obtenemos la intensidad promedio en cada cuadrante, la cual es un simple estimado de la función de intensidad.

Una prueba estadística para homogeneidad (dejando de asumir que las áreas son iguales), basada en los conteos de los cuadrantes, asumiendo que el proceso puntual es Poisson, consiste en considerar, las siguientes hipótesis:

H_0 : La intensidad es homogénea (CSR) y como H_1 : Es un proceso Poisson no homogéneo. Si la hipótesis nula es verdadera, entonces los n_j son realizaciones de variables aleatorias Poisson independientes, con valores esperado $\mu_j = \rho a_j$.

La prueba χ^2 podría ser usada en dos formas diferentes: como una prueba de bondad de ajuste para la distribución Poisson asumiendo homogeneidad o como una prueba de homogeneidad asumiendo independencia. Enfocándose en la prueba de homogeneidad, se aplica la prueba χ^2 de uniformidad. Dado que el número de puntos $n = \sum_j n_j$ y el área total de la ventana $a = \sum_j a_j$, entonces la intensidad estimada es $\hat{\rho} = n/a$ y el conteo esperado en el cuadrante B_j es $e_j = \hat{\rho} a_j = n a_j / a$. La prueba estadística es:

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(n_j - e_j)^2}{e_j} = \sum_j \frac{(n_j - \hat{\rho} a_j)^2}{\hat{\rho} a_j} \sim \chi^2_{(m-1)} \quad (2.33)$$

Si los cuadrantes tienen igual área, entonces los n_j son independientes con igual valor esperado bajo la hipótesis nula. La prueba estadística se reduce a:

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(n_j - n/m)^2}{n/m} \sim \chi^2_{(m-1)}$$

Bajo la hipótesis nula, la distribución del test estadístico es aproximadamente una χ^2 con $m - 1$ grados de libertad y los residuales Pearson son $r_j = (n_j - e_j) / \sqrt{e_j}$. La aproximación es tradicionalmente aceptable cuando los conteos esperados e_j son mayores que 5 para todos los cuadrantes.

La principal crítica de la prueba estadística basada en cuadrantes, es la falta de información. Esta prueba de bondad del ajuste en la que la hipótesis alternativa H_1 , es simplemente la negación de H_0 , es decir, la hipótesis alternativa es “el proceso no es un proceso de Poisson homogéneo”. Un proceso puntual puede no dar cumplimiento a las propiedades de CSR ya sea porque por tener intensidad no uniforme, o porque no existe independencia entre los puntos. Es decir, son demasiados tipos de salida para H_0 . La justificación habitual para la clásica prueba de bondad de ajuste χ^2 , es asumir que los recuentos son independientes y así obtener una prueba para la hipótesis nula de que todos los cuadrados tienen el mismo valor esperado. Aceptar esto es poco ingenuo, ya que la independencia de los recuentos es también cuestionable aquí.

De hecho, también se puede cambiar las cosas y ver la prueba χ^2 como una prueba de las propiedades de independencia del proceso Poisson suponiendo que la intensidad es homogénea. El estadístico de prueba χ^2 de Pearson (2.33) coincide, hasta un factor constante, con el ratio varianza/media muestral (simple variance-to-mean) de los recuentos de n_j , conocido como el coeficiente de dispersión, que es interpretado como una medida de más/menos dispersión de los conteos n_j suponiendo que tienen media constante.

La potencia de la prueba por cuadrante depende del tamaño de los mismos ya que tiende a cero para cuadrantes que son ya sean muy grandes o muy pequeñas. También depende de la hipótesis alternativa, en particular sobre la “escala espacial” para cualquier punto de partida de los supuestos de intensidad constante o independencia entre puntos. La elección del tamaño de cuadrante lleva una suposición implícita de la escala espacial, sin embargo en muchos trabajos aplicados se acostumbra realizar la prueba para distintos tamaños de cuadrantes. Para más detalle consulte Schabenberger y Gotway (2005), Lloyd (2007), Baddeley (2008) y Diggle (2014).

La prueba χ^2 de homogeneidad basada en conteo de cuadrantes puede también ser aplicado para ajustar un modelo de proceso Poisson no homogéneo. Para más detalle consulte Baddeley (2008).

2.5.6 PRUEBAS KOLMOGOROV-SMIRNOV PARA CSR

Una prueba de CSR más poderosa, es la prueba de Kolmogorov-Smirnov, en el que se compara la distribución observada de los valores de la covariable en los puntos x_1, \dots, x_n

(del patrón puntual o datos de puntos) con los valores de la covariable en todas las ubicaciones espaciales u de W . El principio es que, si el proceso puntual es completamente aleatorio, entonces los datos de puntos son efectivamente una muestra aleatoria de ubicaciones espaciales en W , de esta manera los valores de la covariable en datos de puntos $z_i = Z(x_i)$ podría ser una muestra aleatoria de los valores de la covariable en todas las ubicaciones espaciales de W . La prueba en general consiste en una medida de discrepancia entre funciones de distribución acumulada de una covariable (Baddeley et al., 2016).

Una prueba de bondad de ajuste de un modelo estadístico, es una prueba en la cual H_0 es que el modelo es verdadero y H_1 no lo es. De esta forma asumiendo que las observaciones son independientes y siguen una distribución común *cdf*(por sus siglas en ingles) F . La hipótesis nula es $H_0: F_0 \equiv F$ y la hipótesis alternativa es $H_1: F_0 \neq F$. La *cdf* empírica de los datos es:

$$\hat{F}(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}[z_i \leq z] \quad (2.34)$$

tal que $\hat{F}(z)$ es la fracción de observaciones menores o iguales a z .

El test se basa en la discrepancia entre la función \hat{F} y F_0 . Así la prueba estadística de Kolmogorov – Smirnov es la máxima separación vertical entre \hat{F} y F_0 :

$$D = \max_z |\hat{F}(z) - F_0(z)| \quad (2.35)$$

Para el caso de intensidad homogénea, cualquier función espacial puede ser usada, incluyendo datos observados y funciones construidas artificialmente. Diferentes elecciones de Z cambian la sensibilidad de los diferentes tipos de partida de las hipótesis nulas. La covariable Z es evaluada en cada punto de los datos $z_i = Z(x_i)$ y la función de distribución acumulada $\hat{F}(z)$ de estos valores es calculada. Seguidamente Z es evaluado en cada ubicación espacial u en W (en la práctica se evalúa en cada centro de pixel en un grid) y la función de distribución acumulada de estos valores es formado:

$$F_0(z) = \frac{\sum \mathbf{1}[u \in W: Z(u) \leq z]}{|W|} = \frac{\#\{pixels\ u: Z(u) \leq z\}}{\#pixels} \quad (2.36)$$

La discrepancia entre $\hat{F}(z)$ y $F_0(z)$ es entonces medida usando la estadística Kolmogorov – Smirnov.

La *cdf* de valores de covariables puede también ser usada para una prueba de bondad de ajuste de un modelo de proceso Poisson no homogéneo. La hipótesis nula es que se tiene un proceso Poisson con intensidad $\rho_0(u)$ en la ventana W . Se inicia extrayendo el valor de la covariable $z_i = Z(x_i)$ en los datos de puntos observados y la forma empírica *cdf* $\hat{F}(z)$ de los valores observados z_i . Si la hipótesis nula es verdadera, entonces z_1, z_2, \dots constituye un proceso puntual sobre la recta lineal. Los valores individuales z_i son independientes e idénticamente distribuidas con *cdf*:

$$F_0(z) = \frac{\int_W \mathbf{1}[Z(u) \leq z] \rho_0(u) du}{\int_W \rho_0(u) du} \quad (2.37)$$

Para más detalle consulte Baddeley et al. (2016) y las referencias en él.

2.6 MÁXIMA VEROSIMILITUD

Los modelos estadísticos para procesos puntuales pueden ser formulados desde dos enfoques, el primero basado en las estadísticas de resumen descritas en Diggle (2014) y Baddeley et al. (2011) y el segundo basado en la función de verosimilitud para el caso del proceso Poisson. En este último enfoque resulta sencilla la incorporación de los efectos de covariables y tendencias en la función de intensidad de forma semejante al procedimiento para modelos lineales generalizados. Para esta tesis nos abocamos en el segundo enfoque y en procesos puntuales finitos²³ (acotados).

El método de máxima verosimilitud, ha sido aplicado a los modelos de procesos puntuales Poisson espaciales tanto al caso homogéneo y no homogéneo, debido a las expresiones simples de su función de verosimilitud.

Siguiendo lo descrito en Diggle (2014), considere $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ una realización (llamada también patrón puntual) del proceso puntual Poisson espacial X , observada sobre

²³ En temas aplicados son más frecuentes definir un proceso puntual para un espacio acotado (la ventana de observación).

la región²⁴ W . La densidad conjunta para n y x ha sido dada en (2.2), Asumiendo $B = W$, entonces:

$$f\{(x_1, \dots, x_n), n\} = \left\{ \frac{e^{-\mu} \prod_{i=1}^n \rho(x_i)}{n!} \right\}$$

donde $\mu = \mu(W) = \int_W \rho(u) du$, por tanto la función de log-verosimilitud, basada sobre los datos x e ignorando la constante $n!$, se obtiene:

$$\log L(\rho) = \sum_{i=1}^n \log \rho(x_i) - \int_W \rho(u) du \quad (2.38)$$

Otra forma equivalente utilizada en Baddeley y Turner (2000) y Baddeley *et. al.* (2016), es considerar a la densidad de probabilidad del proceso puntual Poisson no homogéneo X con respecto al proceso Poisson Estándar (*i.e.*, $\rho = 1$ en W).

Considere $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ un patrón puntual espacial ($n \geq 0$, no fijo), es decir, una realización del Proceso de Poisson no homogéneo en W con función intensidad $\rho: W \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, y la densidad con respecto al proceso de Poisson estándar, según (2.5) es de la siguiente forma:

$$f(x) = \exp(|W| - \mu(W)) \prod_{u \in x} \rho(u)$$

donde $\mu(W) = \int_W \rho_\theta(u) du$, es el número esperado de casos del proceso Poisson no homogéneo con intensidad $\rho(u)$ en la región W de área $|W| = \int_W 1 du$. Entonces, podemos reescribir la expresión anterior como:

$$f(x) = \exp\left(-\int_W [\rho(u) - 1] du\right) \prod_{u \in x} \rho(u) \quad (2.39)$$

2.6.1 CASO HOMOGÉNEO

En el caso del proceso puntual espacial Poisson homogéneo, la intensidad es constante, por tanto la densidad (2.37) queda reducida a:

$$f(x, \rho) = \exp\{-(\rho - 1)|W|\} \rho^n \quad (2.40)$$

El log-verosimilitud, omitiendo la constante $|W|$, queda expresado de la siguiente forma:

²⁴ La región W conocida, es un subconjunto acotado d -dimensional del espacio \mathbb{R}^d , donde $d \geq 1$

$$\log L(\rho; x) = n \log \rho - \rho |W|$$

Resolviendo la ecuación normal, de primera derivada parcial con respecto a ρ , se obtiene el estimador de máxima verosimilitud (MLE):

$$\hat{\rho} = n/|W| \quad (2.41)$$

que también es un estimador insesgado. Esto asegura que el número esperado de puntos es el número observado de puntos. La varianza de $\hat{\rho}$ es $Var[\hat{\rho}] = \hat{\rho}/|W|$.

2.6.2 CASO NO HOMOGÉNEO

El proceso puntual Poisson espacial no homogéneo, es muy utilizado para modelos estadísticos, aquí la intensidad $\rho_\theta(u)$ dependerá de θ , un vector de parámetros donde $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ está definida sobre un conjunto $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$. Así de esta forma se puede reflejar *tendencia espacial*²⁵ o dependencia sobre una covariable. La densidad (2.39), será:

$$f(x, \theta) = \exp \left\{ - \int_W [\rho_\theta(u) - 1] du \right\} \prod_{i=1}^n \rho_\theta(x_i) \quad (2.42)$$

Entonces el log – verosimilitud para θ , omitiendo la constante $\int_W 1 du = |W|$, es:

$$\log L(\theta; x; W) = \sum_{i=1}^n \log \rho_\theta(x_i) - \int_W \rho_\theta(u) du \quad (2.43)$$

Si $\log \rho_\theta(u)$ es lineal en θ , entonces el log – verosimilitud es cóncava, por lo que existe un MLE único. Sin embargo, el MLE $\hat{\theta}$ no es tratable analíticamente, por lo que debe ser calculado utilizando algoritmos numéricos tales como el método de Newton. El cálculo de la función log-verosimilitud resulta complicado además por la presencia de la integral $\int_W \rho_\theta(u) du$. Una alternativa para la aproximación del MLE para el proceso puntual Poisson no homogéneo fue propuesto por Baddeley y Turner (2000), conocido como el dispositivo de Berman-Turner (*Berman-Turner device*).

2.6.3 MODELO LOG-LINEAL

Un modelo muy utilizado, es el modelo log-lineal general descrito a detalle en Baddeley *et*

²⁵ Es decir, un cambio en la intensidad a través de la región de observación

al. (2015) donde la intensidad, es de la siguiente forma:

$$\rho_{\theta}(u) = \exp\{B(u) + \theta^T \mathbf{Z}(u)\} \quad (2.44)$$

donde $B(u), Z_1(u), \dots, Z_p(u)$ son funciones conocidas (en específico $B(u)$ es conocida como la *línea base*), $\theta^T = [\theta_1, \dots, \theta_p]$ es el vector de parámetros a ser estimado, $\mathbf{Z}(u) = [Z_1(u), \dots, Z_p(u)]^T$ es el vector de los valores de las funciones (covariables) y $\theta^T \mathbf{Z}(u) = \theta_1 Z_1(u) + \dots + \theta_p Z_p(u)$. Cox (1972), lo denominó el *proceso Poisson modulado*.

Equivalentemente la intensidad se puede expresar en forma lineal, tomando logaritmo:

$$\log \rho_{\theta}(u) = B(u) + \theta^T \mathbf{Z}(u) \quad (2.45)$$

donde $\theta^T \mathbf{Z}(u) = \theta_1 Z_1(u) + \dots + \theta_p Z_p(u)$. Las funciones B y Z_1, \dots, Z_p podría variar espacialmente en cualquier sentido, por lo que esta es una clase muy amplia y flexible de modelos.

El modelo de intensidad log-lineal tiene varias ventajas. La intensidad de un proceso puntual debe ser mayor o igual a cero, y esto siempre se satisface con el modelo log-lineal, independientemente del valor de θ y los valores de las funciones B y Z_1, \dots, Z_p , debido al exponente en (2.44). En teoría estadística el logaritmo es la transformación 'canónica' de la media para un modelo de Poisson, y esto confiere muchas ventajas en la teoría y la práctica.

Reemplazando (2.45) en (2.43), el log-verosimilitud para la intensidad log-lineal, es:

$$\begin{aligned} \log L(\theta) &= \sum_{i=1}^n \{B(x_i) + \theta^T \mathbf{Z}(x_i)\} - \int_W \exp\{B(u) + \theta^T \mathbf{Z}(u)\} du \\ \log L(\theta) &= \sum_{i=1}^n B(x_i) + \theta^T \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}(x_i) - \int_W \exp\{B(u) + \theta^T \mathbf{Z}(u)\} du \end{aligned} \quad (2.46)$$

Este modelo es miembro de la familia exponencial parametrizada canónicamente Barndorff-Nielsen (1978), Lehmann (1983). El log-verosimilitud (2.46) es una función cóncava del parámetro θ , y es diferenciable con respecto de θ , incluso si las funciones B y Z_j no son continuas. Si la matriz $M = \int_W \mathbf{Z}(u) \mathbf{Z}(u)^T du$ es definida positiva, entonces el modelo es identificable. Si los datos son tales que $\sum_i Z_j(x_i) \neq 0$ para todo j , el Estimador de Máxima Verosimilitud (MLE) existe y es único. A menos que haya restricciones

adicionales sobre $\boldsymbol{\theta}$, el MLE es la solución de las ecuaciones de score $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = 0$, donde la función de score es:

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}(x_i) - \int_W \mathbf{Z}(u) \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u) du \quad (2.47)$$

El score es un vector $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = (U_1(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}), \dots, U_p(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}))$ con componentes

$$U_j(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n Z_j(x_i) - \int_W Z_j(u) \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u) du$$

para $j = 1, \dots, p$. La integral en (2.47) es la transformada de Laplace de \mathbf{Z} , de modo que en general, las ecuaciones de puntuación no se pueden resolver analíticamente.

2.6.4 PROPIEDADES ASINTÓTICAS

Para el modelo de proceso puntual Poisson log-lineal, la teoría de la distribución asintótica está disponible en Rathbun y Cressie (1994) y Kutoyants (1998). En condiciones adecuadas cuando $n \rightarrow \infty$, el MLE de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es consistente, asintóticamente normal, asintóticamente eficiente con varianza asintótica $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}$, asumiendo las restricciones dadas en Rathbun y Cressie (1994). El Hessiano para el modelo de *proceso puntual Poisson log-lineal* es igual a la información de Fisher $\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}} \left[-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}; X) \right]$, desde que la matriz Hessiana no depende de los datos \mathbf{x} :

$$H(\boldsymbol{\theta}; X) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}; X) = \int_W \mathbf{Z}(u) \mathbf{Z}(u)^T \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u) du \quad (2.48)$$

Así los elementos de la matriz de información de Fisher son:

$$(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\theta}})_{ij} = \int_W Z_i(u) Z_j(u)^T \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u) du$$

Esta es la base de cálculo de intervalos de confianza y error estándar para los modelos de Poisson.

La prueba de razón de verosimilitud de $H_0: \boldsymbol{\theta} = 0$ (CSR) en contra de $H_1: \boldsymbol{\theta} \neq 0$ en un modelo estadístico con parámetros $\boldsymbol{\theta}$ está basado en el estadístico de prueba:

$$R = 2 \log \frac{L_1}{L_0} = 2(\log L_1 - \log L_0)$$

donde L_0 y L_1 son los valores máximos de la verosimilitud estimada bajo H_0 y H_1 , respectivamente. Para un modelo de proceso puntual Poisson loglineal con intensidad $\rho_{\theta}(u)$ bajo la hipótesis nula, R es una χ^2 con p grados de libertad, donde p es la dimensión de θ (Baddeley et al., 2016).

La integral en el log-verosimilitud del proceso de Poisson log-lineal (2.46) es la transformada de Laplace de la función de covariable \mathbf{Z} , que generalmente no está disponible en forma explícita. En consecuencia, no suele ser posible encontrar una solución analítica exacta para la estimación de máxima verosimilitud. Se requiere algún tipo de aproximación numérica. Las estrategias se presentan en la siguiente sección.

2.6.5 DISPOSITIVO BERMAN -TURNER

La función de verosimilitud (2.43) de un proceso puntual de Poisson implica una integral sobre la ventana de observación espacial W . Excepto en casos especiales, esto significa que la verosimilitud no se puede calcular exactamente, pero debe ser aproximada numéricamente.

La cuadratura numérica es una estrategia computacional simple y eficiente para la integración numérica, en la cual una integral $\int_W f(u)du$ de alguna función f es aproximada por una suma ponderada $\sum_j w_j f(u_j)$ de los valores de la función en una lista finita de *puntos de cuadratura* u_j que tienen *pesos de cuadratura* w_j .

Berman y Turner (1992) desarrollaron un método de cuadratura numérica para la estimación de máxima verosimilitud aproximada para un proceso puntual Poisson no homogéneo. Así una aproximación de la integral en (2.43) por una suma finita usando cualquier regla de cuadratura es:

$$\int_W \rho_{\theta}(u)du \approx \sum_{j=1}^m \rho_{\theta}(u_j)w_j$$

donde $u_j, j = 1, \dots, m$ son puntos en W y $w_j > 0$ son pesos de cuadratura cuya suma es $|W|$. Esto conduce a una aproximación para la verosimilitud (2.43):

$$\log L(\boldsymbol{\theta}) \approx \sum_{i=1}^{n(x)} \log \rho_{\boldsymbol{\theta}}(x_i) - \sum_{j=1}^m \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j) w_j$$

Berman y Turner (1992) observaron también que si la lista de puntos $\{u_j, j = 1, \dots, m\}$ incluye todos los puntos de datos (patrón puntual observado), entonces podemos reescribir (2.43) como una suma sobre los puntos de cuadratura:

$$\log L(\boldsymbol{\theta}) \approx \sum_{j=1}^m (\log \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j) \mathbf{1}[u_j \in x] - \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j) w_j) \quad (2.49)$$

donde $\mathbf{1}[u_j \in x]$ es la función indicador, que toma el valor de 1 cuando u_j cae dentro de la cuadratura de un punto del patrón puntual y toma el valor de 0 cuando cae en una cuadratura donde no se observó ningún punto del patrón puntual.

La expresión (2.49) puede escribirse también de la siguiente forma:

$$\log L(\boldsymbol{\theta}) \approx \sum_{j=1}^m (y_j \log \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j) - \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j)) w_j \quad (2.50)$$

donde $y_j = \mathbf{1}[u_j \in x] / w_j$. El lado derecho de (2.50), para un x fijo, es formalmente equivalente a la log-verosimilitud ponderada de variables aleatorias Poisson $Y_j \sim \text{Poisson}(\rho_j)$ tomando como pesos w_j . La expresión (2.50) puede por lo tanto ser maximizada como en el caso de modelos lineales generalizados. Además la devianza D del modelo ajustado; está relacionada con el log-verosimilitud del modelo ajustado por:

$$-\log L(\hat{\boldsymbol{\theta}}, x) = \frac{D}{2} + \sum_{j=1}^m \mathbf{1}[u_j \in x] \log w_j + n(x) \quad (2.51)$$

donde la suma es efectivamente sobre los puntos de datos. Convenientemente, el modelo nulo $\rho_j \equiv \rho$ en la regresión Poisson log-lineal corresponde al proceso puntual Poisson uniforme con intensidad ρ . El MLE es $\hat{\rho} = n / \sum_j w_j = n / |w|$ con la correspondiente log-verosimilitud $\log L(\hat{\rho}) = n(\log n - \log |W| - 1)$.

Note que esta formulación asume que $\hat{\rho}(u)$ casi siempre es positiva. Los valores ceros son también admisibles, siempre y cuando el conjunto de ceros no dependa de $\boldsymbol{\theta}$. Así formalmente consentimos valores infinitos negativos para $Z(u)$.

En la aproximación (2.50) todos los puntos u_j con $\hat{\rho}(u_j) = 0$ serán puntos dummies. Su contribución es cero y así ellos podrían ser omitidos en todos los contextos. Para más detalle consulte Baddeley et al. (2016).

Los diseños de los esquemas de cuadratura se muestran en la Figura 3 y son descritos en Baddeley et al. (2016), estos incluyen la teselación de Dirichlet (o diagrama de varoni) con el fin de generar los pesos de cuadratura. Estos son generados a partir de un grid de puntos (puntos dummy) más los puntos de patrón observado. Los pesos de cuadratura w_j asociado con un punto u_j (dato o dummy) es el área de la correspondiente baldosa (tile) de Dirichlet.

Computacionalmente es menos costoso usar los pesos de conteo. En su forma simple asignamos igual peso a cada punto de cuadratura, $w_j = |W|/m$. En general dividimos la ventana W en baldosas y todos los puntos de cuadratura que caen dentro de una baldosa T reciben el mismo peso $w_j = |T|/k$, donde k es el número de puntos de cuadratura en T .

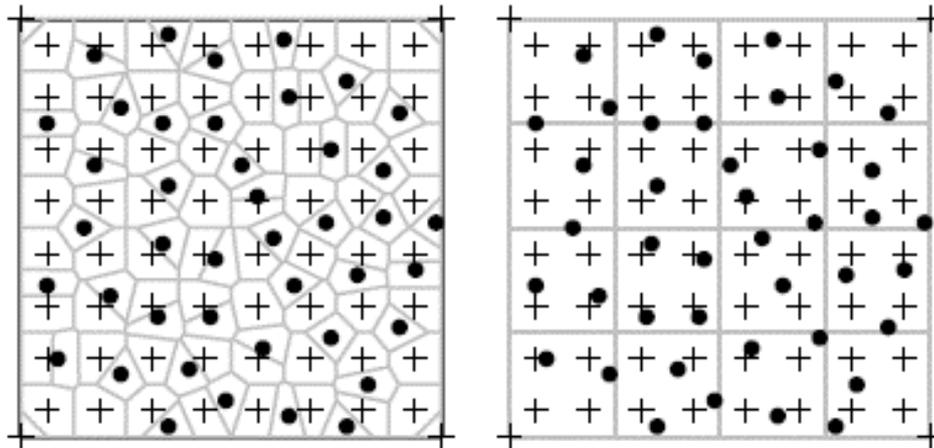


Fig. 3: Esquemas de cuadratura para datos de patrones puntuales. (.) es una dato de punto y (+) es un punto dummy. En el lado izquierdo se muestra la teselación de Dirichlet para pesos, mientras que el lado derecho son áreas rectangulares, para pesos de conteo.

Fuente: Baddeley et al. (2016).

2.6.6 APROXIMACIÓN POR UN FINO PIXEL

Otra estrategia de cuadratura para aproximar la función de log-verosimilitud del proceso Poisson es dividir la ventana W en pequeños pixeles de igual área a . La integral sobre la ventana W es entonces aproximada por la suma sobre estos pixeles:

$$\int_W \rho_{\theta}(u) du \approx \sum_{j=1}^m \rho_{\theta}(u_j) a$$

donde u_j es el centro del j -ésimo pixel. También descartamos las posiciones exactas de los puntos de datos, y eficazmente movemos cada punto de datos al centro del pixel que lo contiene. Así aproximamos la suma sobre los datos por una suma sobre los pixeles:

$$\sum_{i=1}^n \log \rho_{\boldsymbol{\theta}}(x_i) = \sum_{j=1}^m n_j \log \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j)$$

donde n_j es el número de datos de puntos que caen en el j -ésimo pixel. Con los resultados anteriores la función log-verosimilitud (2.43) queda expresada como:

$$\begin{aligned} \log L(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{j=1}^m n_j \log \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j) - \sum_{j=1}^m \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j) a \\ \log L(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{j=1}^m \{n_j \log \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j) - \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j) a\} \\ \log L(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{j=1}^m \{n_j \log \rho_j - \rho_j a\} \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde $\rho_j = \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j)$. Así la expresión $\log L(\boldsymbol{\theta})$ tiene la misma forma como la log-verosimilitud de una variable aleatoria N_j con media $a\rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j)$. Esto debió esperarse, porque los conteos en los pixeles N_j son variables aleatorias Poisson independientes y $a\rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j)$ es una aproximación de la media verdadera de N_j .

En el caso de un modelo log-lineal de un proceso puntual Poisson (2.44), la intensidad $\rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j) = \exp\{B(u_j) + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{Z}(u_j)\}$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$\rho_j = \exp\{b_j + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{z}_j\}$$

donde $\rho_j = \rho_{\boldsymbol{\theta}}(u_j)$, $b_j = B(u_j)$ y $\mathbf{z}_j = \mathbf{Z}(u_j)$. El lado derecho de (2.52) es el log-verosimilitud de un variable aleatoria independiente Poisson N_j con media:

$$\begin{aligned} \mu_j &= a\rho_j \\ &= a \exp\{b_j + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{z}_j\} \\ &= \exp\{\log a + b_j + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{z}_j\} \\ &= \exp\{c + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{z}_j\} \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde $c = \log a + b_j$. Esta expresión corresponde a una regresión Poisson log-lineal con covariables \mathbf{z}_j y offset $c = b_j + \log a$. Así los coeficientes estimados $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ para la regresión Poisson log-lineal son los estimadores aproximados de máxima verosimilitud $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ para el modelos proceso puntual Poisson loglineal.

2.6.7 MODELO NO LOGLINEALES

En muchos modelos de intensidad, algunos de los parámetros aparecen en la forma log-lineal, mientras que otros parámetros no. Así un modelo de la forma:

$$\rho_{\boldsymbol{\theta}}(u) = \exp\{\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{Z}(u, \boldsymbol{\psi})\} \quad (2.54)$$

donde $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})$ es una partición de las entradas de los parámetros del vector $\boldsymbol{\theta}$ en *parámetros regulares* $\boldsymbol{\varphi}$ los cuales aparecen en la forma loglineal en (2.54) y *parámetros irregulares* $\boldsymbol{\psi}$ los cuales no aparecen en la forma log-lineal. Si fijamos los valores de los parámetros irregulares $\boldsymbol{\psi}$, entonces la ecuación (2.54) es loglineal en los parámetros restantes $\boldsymbol{\varphi}$, este es un modelo de proceso puntual Poisson loglineal el cual puede ser estimado usando los métodos descritos anteriormente. Así, para cualquier elección de $\boldsymbol{\psi}$, la verosimilitud $L(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})$ puede ser fácilmente maximizada sobre todos los posibles valores de $\boldsymbol{\varphi}$, obteniéndose el estimado del perfil (profile) de máxima verosimilitud.

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\psi}) = \arg \max_{\boldsymbol{\varphi}} L(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) \quad (2.55)$$

y el valor estimado máximo de la verosimilitud para un valor dado de $\boldsymbol{\psi}$ es llamado el perfil de verosimilitud:

$$pL(\boldsymbol{\psi}) = \max_{\boldsymbol{\varphi}} L(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) \quad (2.56)$$

El estimado de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ puede ser obtenido por maximización del perfil de verosimilitud sobre $\boldsymbol{\psi}$. Es decir, si $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \arg \max_{\boldsymbol{\psi}} pL(\boldsymbol{\psi})$ es el valor de los parámetros irregulares que maximiza el perfil de verosimilitud, entonces $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\hat{\boldsymbol{\psi}}), \hat{\boldsymbol{\psi}})$ es el estimado de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$.

Una alternativa para maximizar el perfil de verosimilitud es por “fuerza bruta”. Se evalúa $pL(\hat{\boldsymbol{\psi}})$ sobre un grid de valores de prueba de $\boldsymbol{\psi}$ el cual conduce al máximo.

Otra alternativa para encontrar la raíz que maximiza el perfil de verosimilitud, es el método de Newton aplicado al score, siempre que la función de intensidad sea diferenciable con respecto al parámetro irregular. Si $\rho_{\theta}(u)$ es diferenciable con respecto a todos los componentes de θ , el score es:

$$\mathbf{U}(\theta; x) = \sum_{i=1}^n z_{\theta}(x_i) - \int_W z_{\theta}(u) \rho_{\theta}(u) du \quad (2.56)$$

donde $z_{\theta}(u) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log \rho_{\theta}(u)$ y la información observada es:

$$H(\hat{\theta}; x) = - \sum_{i=1}^n k_{\hat{\theta}}(x_i) + \int_W k_{\hat{\theta}}(u) \rho_{\hat{\theta}}(u) du + \int_W k_{\hat{\theta}}(u) k_{\hat{\theta}}(u)^T \rho_{\hat{\theta}}(u) du \quad (2.57)$$

donde $k_{\theta}(u) = \frac{\partial}{\partial \theta} z_{\theta}(u) = \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} \log \rho_{\theta}(u)$. En el método de Newton – Rhapsion actualizamos repetidamente nuestro estimado actual de θ por:

$$\theta_{m+1} = \theta_m - \mathbf{H}(\theta_m; x)^{-1} \mathbf{U}(\theta_m; x) \quad (2.58)$$

Para más detalle consulte Baddeley et al. (2016).

2.7 PROCESOS PUNTUALES COX

La clase de los procesos de Poisson es por lo general un modelo de clase demasiado simplista para datos reales, pero puede ser utilizado para construir modelos más flexibles. Un caso importante son los procesos de Cox y los procesos puntuales de Markov. Los procesos Cox son modelos para agregados o clustering de patrones puntuales. Ciertos procesos Cox se obtienen por la agrupación de los puntos alrededor de otro proceso puntual, y son por lo tanto casos especiales de los llamados *procesos clúster*.

Un proceso Cox es una extensión natural de un proceso de Poisson, obtenido al considerar la función de intensidad del proceso de Poisson como una realización de un campo aleatorio. Tales procesos fueron estudiados en un artículo seminal de Cox (1955) bajo el nombre de procesos de Poisson doblemente estocásticos, pero son hoy usualmente llamados procesos Cox.

Supóngase que $Z = \{Z(u): u \in S\}$ es un *campo aleatorio* no negativo, donde $S \subseteq \mathbb{R}^d$, de modo que con probabilidad uno, $u \rightarrow Z(u)$ es una función localmente integrable. Si la distribución condicional de X dado Z es un proceso de Poisson en S con función de intensidad Z , entonces X se dice que es un proceso Cox generado por Z .

Que Z sea un campo aleatorio significa que $Z(u)$ es una variable aleatoria para todo $u \in S$ (Adler, 1981). Si existe $\rho(u) = \mathbb{E}[Z(u)]$ y es localmente integrable, entonces con probabilidad uno, $Z(u)$ es una función localmente integrable. La medida de intensidad del proceso de Poisson $X|Z$ es:

$$M(B) = \int_B Z(u) du, B \subseteq S \quad (2.59)$$

Esta es una medida aleatoria, y podemos definir el proceso Cox en términos de M en lugar de Z . En el caso especial en el que Z es determinista, X simplemente se convierte en un Proceso de Poisson con función de intensidad $\rho = Z$.

Los procesos Cox son semejantes a los modelos de procesos Poisson no homogéneos para patrones puntuales agregados. Usualmente en las aplicaciones Z es no observado, por lo que no se puede distinguir un proceso Cox X de su correspondiente proceso Poisson $X|Z$ cuando sólo una realización de X_W está disponible (donde W denota la ventana de observación). Cuál de los dos modelos puede ser más apropiado, es decir, si Z debe ser aleatoria o "sistemática"/ determinista, depende de:

- Las cuestiones científicas a investigar: Si por ejemplo, queremos investigar la dependencia de ciertas covariables asociadas a Z , estas pueden ser tratadas como términos sistemáticos, mientras que los efectos no observados pueden ser tratados como términos aleatorios (Benes et al., 2002).
- La aplicación en particular: Si parece difícil de modelar un patrón agregado de puntos con una clase paramétrica de procesos Poisson no homogéneos (por ejemplo, una clase de funciones polinómicas de intensidad), los modelos de proceso Cox permiten una mayor flexibilidad y/o una parametrización más parsimoniosa.
- Conocimiento previo: En un enfoque bayesiano, la incorporación de conocimiento previo de la función de intensidad de un proceso de Poisson conduce a un modelo

de proceso Cox; el suavizamiento no paramétrico bayesiano de la función de intensidad es tratado por Heikkinen y Arjas (1998).

2.7.1 PROPIEDADES BÁSICAS

Las propiedades de la distribución de un proceso Cox X son descritas en Lawson y Denison (2002) y en la sección 5.2 de Moller y Waapetersen (2004). Estas se obtienen inmediatamente por el condicionamiento en Z y de las propiedades del proceso de Poisson $X|Z$. Así, la función de intensidad es:

$$\rho(u) = \mathbb{E}Z(u) \quad (2.60)$$

y la función de correlación par está dada por:

$$g(u, v) = \mathbb{E}[Z(u)Z(v)]/[\rho(u)\rho(v)] \quad (2.61)$$

Siempre $Z(u)$ tiene una varianza finita para todo $u \in S$. Esto ilustra que la medida momento y la medida de momento factorial reducido puede fácilmente ser expresada en términos de los momentos de Z . Para los modelos más específicos, tales como en los procesos clúster, $g \geq 1$, aunque existen algunas excepciones a esta. La intensidad de segundo orden reponderado estacionario está garantizada por la traslación de invariancia de $g(u, v) = g(u - v)$, en cuyo caso \mathcal{K} o K puede calcularse a partir de (2.11).

Para $A, B \subseteq S$ con $\text{Var}N(A) < \infty$ y $\text{Var}N(B) < \infty$:

$$\text{Cov}(N(A), N(B)) = \int_A \int_B \text{Cov}(Z(u), Z(v)) \, dudv + \mu(A \cap B) \quad (2.62)$$

donde $\mu(B) = \mathbb{E}N(B)$ es la medida de intensidad. Tenga en cuenta que $\text{Var}N(A) \geq \mathbb{E}N(A)$ son iguales sólo cuando X es un proceso de Poisson. En otras palabras, un proceso de Cox exhibe exceso de dispersión en comparación con un proceso de Poisson.

Si $S = \mathbb{R}^d$ y Z es estacionaria y/o isotrópico (lo que significa que el distribución de Z es invariante por traslaciones/rotaciones), entonces X es estacionaria y/o isotrópico. Las expresiones explícitas de las funciones F, G y J para un proceso Cox estacionario son en general difíciles de obtener.

Considere un proceso Cox X restringido a un conjunto $B \subseteq S$ con $|B| < \infty$. Por (2.5), la densidad de X_B con respecto al proceso de Poisson estándar viene dado por:

$$f(x) = \mathbb{E}[\exp(|B| - \int_B Z(u) du) \prod_{u \in x} Z(u)] \quad (2.63)$$

para configuraciones puntuales finito $x \subset B$. Una expresión explícita de la media en (2.63) es generalmente desconocida.

2.7.2 PROCESOS NEYMAN-SCOTT

Un proceso Neyman-Scott (Neyman y Scott, 1958), es un caso particular de un proceso clúster Poisson (Lawson y Denison, 2002) y por tanto de un proceso Cox. Estos procesos son casos especiales de los *procesos Cox de ruido blanco (shot noise Cox processes)* (Moller y Waagepetersen, 2004).

Sea C un proceso de Poisson estacionario en \mathbb{R}^d con intensidad $\kappa > 0$. Condicionado en C , considere X_c , $c \in C$, sea un proceso Poisson independiente en \mathbb{R}^d donde X_c tiene función de intensidad:

$$\rho_c(u) = \alpha k(u - c)$$

donde $\alpha > 0$ es un parámetro y k es un kernel (es decir, para todos $c \in \mathbb{R}^d$, $u \rightarrow k(u - c)$ es una función de densidad). Entonces $X = \cup_{c \in C} X_c$ es un caso especial de un proceso de *Neyman-Scott* con centro del *clúster* C y clústeres X_c , $c \in C$ (en la definición general de un proceso de Neyman-Scott, $n(X_c)$ dado C no se limita a ser una variable aleatoria Poisson (Stoyan et al., 1995).

Por las propiedades de superposición de procesos Poisson, X es también un proceso de Cox en \mathbb{R}^d generado por:

$$Z(u) = \sum_{c \in C} \alpha k(u - c) \quad (2.64)$$

claramente, Z en (2.64) es estacionaria y localmente integrable, y es también isotrópico si $k(u) = k(\|u\|)$ es isotrópico. La intensidad es $\rho = \alpha\kappa$, y la función de correlación par es dado por:

$$g(u) = 1 + h(u)/\kappa \quad (2.65)$$

donde $h(u) = \int k(v)k(u + v) dv$, es la densidad para la diferencia entre dos puntos independientes donde cada uno tiene su densidad k .

Además:

$$J(r) = \int k(u) \exp\left(-\alpha \int_{\|v\| \leq r} K(u+v) dv\right) du \quad (2.66)$$

de modo que $J(r)$ es no creciente para $r > 0$ con rango $(\exp(-\alpha), 1)$. Así $F(r) < G(r)$ para $r > 0$. Para más detalle consulte la sección 5.3 de Moller y Waagepetersen (2004).

2.7.3 PROCESOS NEYMAN-SCOTT NO HOMOGENEOS

Sea $S \subset \mathbb{R}^2$. Para $u \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{z}(u)$ denota un vector de covariables espaciales de dimensión $1 \times p$, con $p \geq 1$. Los procesos Newman-Scott no homogéneos son descritos en Waagepetersen (2007).

Suponemos que observamos un patrón puntual, es decir, una realización de un proceso puntual espacial $X \cap S$ donde $X = X_{c \in C}$ es una superposición de clústeres X_c de grupos de “descendencias” asociados con su punto “madre” c en un proceso puntual Poisson estacionario de intensidad $k > 0$. Dado C , los clústeres X_c son procesos Poisson independientes con función de intensidad:

$$\rho_c(u) = \alpha k(u - c; w) \exp(\mathbf{z}(u) \boldsymbol{\beta}^T) \quad (2.67)$$

donde $\alpha > 0$, $\boldsymbol{\beta}^T$ es el vector de dimensión $1 \times p$ de parámetros de regresión y k es una densidad de probabilidad que depende de un parámetro $w > 0$ determinando la diseminación de los puntos de descendientes alrededor de c . Los parámetros de interés son los de regresión $\boldsymbol{\beta}$ mientras k, α y w son considerados como parámetros de perturbación.

Asumiendo que $\exp(\mathbf{z}(u) \boldsymbol{\beta}^T)$ es acotada por alguna constante M . Un clúster X_c puede entonces ser considerado como un adelgazamiento (*thinning*) independiente de un cluster Y_c con función de intensidad $M \alpha k(\cdot - c; w)$ donde la probabilidad de adelgazamiento que varía espacialmente es $\exp(\mathbf{z}(u) \boldsymbol{\beta}^T) / M$. Desde este punto de vista ecológico, las variables del entorno ambiental controlan la supervivencia de las descendencias en Y_c . La perspectiva de adelgazamiento es además útil para fines de simulación: es sencillo para simular el proceso Neyman-Scott homogéneo $Y = \cup_{c \in C} Y_c$ y en segundo lugar aplicar adelgazamiento para obtener una realización de X . Para la simulación de $X \cap S$, basta que $M = \max_{u \in C} \exp(\mathbf{z}(u) \boldsymbol{\beta}^T)$.

La función de intensidad de X es:

$$\rho(u) = \kappa\alpha \exp(\mathbf{z}(u)\boldsymbol{\beta}^T) = \exp(\mathbf{Z}(u)\boldsymbol{\theta}^T), u \in \mathbb{R}^2 \quad (2.68)$$

donde $\mathbf{Z}(u) = (1, \mathbf{z}(u))$ y $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \boldsymbol{\beta}) = (\log(\kappa\alpha), \boldsymbol{\beta})$. La conocida función $-K$ no homogénea (Baddeley et al., 2000) para X coincide con la función- K para el proceso estacionario Y (ajustando $\rho_Y = \kappa M\alpha$ denota la intensidad constante de Y y $\rho_Y K(t)$ es el número esperado de puntos dentro de una distancia t de un punto típico de Y).

El clustering en la realidad son resultados de una iteración de eventos madre-descendientes a lo largo de varias generaciones.

2.7.4 ESTIMACION DE PARÁMETROS

Intuitivamente uno puede esperar obtener un estimado útil del parámetro $\boldsymbol{\theta}$ usando una función de estimación basado en la función de intensidad. Por lo tanto consideramos:

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{u \in X \cap S} \mathbf{z}(u)\boldsymbol{\theta}^T - \int_S \exp(\mathbf{Z}(u)\boldsymbol{\theta}^T) du \quad (2.69)$$

con la correspondencia simple a la función de log verosimilitud bajo la suposición que X es un proceso Poisson con función de intensidad (2.68). La función de estimación insesgada es la derivada:

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \frac{d}{d\boldsymbol{\theta}} l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{u \in X \cap S} \mathbf{z}(u) - \int_S \mathbf{Z}(u) \exp(\mathbf{Z}(u)\boldsymbol{\theta}^T) du \quad (2.70)$$

con sensibilidad:

$$j(\boldsymbol{\theta}) = \frac{d}{d\boldsymbol{\theta}^T} U(\boldsymbol{\theta}) = \int_S \mathbf{Z}(u)^T \mathbf{Z}(u) \exp(\mathbf{Z}(u)\boldsymbol{\theta}^T) du \quad (2.71)$$

La ecuación de estimación $U(\boldsymbol{\theta}) = 0$ tiene una solución única $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que maximiza $l(\boldsymbol{\theta})$ si la sensibilidad j es definida positiva. Este es el caso siempre que exista una región $A \subseteq S$ de área positiva $|A| > 0$ tal que $\mathbf{Z}(u)^T \mathbf{Z}(u)$ es definida positiva para $u \in A$. La función objetivo $l(\boldsymbol{\theta})$ se puede maximizar fácilmente mediante el procedimiento descrito en la sección (2.6.5), es decir utilizando el dispositivo Berman - Turner para aproximar la integral en (2.69). Para más detalle consulte Berman y Turner (1992). La definición

positiva de j es, además, suficiente para establecer la normalidad asintótica de la estimación $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ de $\boldsymbol{\beta}$.

Una estimación (Baddeley et al., 2000; Moller y Waagepetersen, 2004) de la función- K de X se puede obtener sustituyendo la función de intensidad (2.68) por el estimado $\exp(\mathbf{Z}(\cdot)\widehat{\boldsymbol{\theta}}^T)$. Más específicamente:

$$\widehat{K}(t) = \sum_{u,v \in X \cap S} \frac{\mathbf{1}[0 < \|u - v\| < t]}{\exp((\mathbf{Z}(u) + \mathbf{Z}(v))\widehat{\boldsymbol{\theta}}^T)} e_{u,v} \quad (2.72)$$

donde $e_{u,v}$ es un factor de corrección de borde.

En las aplicaciones normalmente se usan un kernel k para el cual la función- K tiene una forma explícita en función de κ y w . El estimador de mínimo contraste $\widehat{\kappa}$ y \widehat{w} son entonces obtenidos por minimización de:

$$\int_0^a (\widehat{K}(t)^{1/4} - K(t; \kappa, w)^{1/4})^2 dt \quad (2.73)$$

con respecto a (κ, w) para algún valor de a especificado por el usuario. La elección de a introduce un cierto grado de arbitrariedad en el procedimiento de estimación, ver Diggle (2003), que recomienda que la elección debe ser considerablemente menor que las dimensiones de la ventana de observación. Finalmente $\widehat{\alpha} = \exp(\widehat{\beta}_0)/\widehat{\kappa}$.

2.7.5 PROPIEDADES ASINTÓTICAS.

Denotamos por κ^* , α^* , w^* y $\boldsymbol{\beta}^*$ los valores de los parámetros desconocidos para los cuales se asumen que los datos serán generados. Suponga por un momento que κ^* es conocido en cuyo caso se obtiene la estimación $\widehat{\beta}_0 - \log \kappa^*$ de $\log \alpha$. Para valores grandes de κ^* , $(\widehat{\beta}_0 - \log \kappa^*; \widehat{\boldsymbol{\beta}})$ es aproximadamente normal con media $(\log \alpha^*; \boldsymbol{\beta}^*)$ y matriz de covarianza $\Sigma^* = \Sigma(\kappa^*, \alpha^*, w^*, \boldsymbol{\beta}^*)$, donde:

$$\Sigma(\kappa, \alpha, w, \boldsymbol{\beta}) = (\kappa \alpha J(\boldsymbol{\beta}))^{-1} + J^{-1}(\boldsymbol{\beta}) G(\boldsymbol{\beta}, w) J^{-1}(\boldsymbol{\beta}) / \kappa \quad (2.74)$$

y además:

$$J^{-1}(\boldsymbol{\beta}) = \int_S \mathbf{Z}(u)^T \mathbf{Z}(u) \exp(\mathbf{z}(u)\boldsymbol{\beta}^T) du$$

$$G(\boldsymbol{\beta}, w) = \int_{\mathbb{R}^2} H(\boldsymbol{\beta}, w, c)^T H(\boldsymbol{\beta}, w, c) dc$$

$$H(\boldsymbol{\beta}, w, c) = \int_S \mathbf{Z}(u) \exp(\mathbf{z}(u)\boldsymbol{\beta}^T) k(u - c; w) du$$

En la práctica estimamos la varianza de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ usando un enfoque *plug-in* donde los parámetros desconocidos en Σ^* son reemplazados por sus estimados. Considerando \widehat{sd}_j a la raíz cuadrada del j -ésimo elemento de la diagonal de $\widehat{\Sigma} = \Sigma(\widehat{\kappa}, \widehat{\alpha}, \widehat{w}, \widehat{\boldsymbol{\beta}})$, $[\widehat{\beta}_j - 1.96 \widehat{sd}_j, \widehat{\beta}_j + 1.96 \widehat{sd}_j]$ es un intervalo de confianza aproximadamente al 95% para $\widehat{\beta}_j, j = 1, \dots, p$.

La propiedad asintótica donde κ tiende a infinito no justifica el enfoque *plug-in* y la incertidumbre de las estimaciones de los parámetros *plugged-in* no se tienen en cuenta. Por lo tanto, se debe evaluar la utilidad de los errores estándar y los intervalos de confianza aproximados obtenidos a partir $\widehat{\Sigma}$ a través de estudios de simulación (Waagepetersen, 2007). Tenga en cuenta que el primer término en el lado derecho de (2.74) es la matriz asintótica de covarianza para la estimación de máxima verosimilitud de $(\log \alpha, \boldsymbol{\beta})$ cuando los datos se generan bajo un proceso Poisson con función de intensidad (2.68).

Las integrales J , G , y H se evalúan usando las sumas de Riemann donde $k(u - c; w)$ es aproximado por $\mathbf{1}[u \in D_c]k(u - c; w)$ para un disco D_c alrededor c . Para más detalle consulte Waagepetersen (2007).

2.8 DIAGNÓSTICOS DE RESIDUALES

Baddeley et al. (2005) definieron los residuales para modelos de procesos puntuales, de manera general para los llamados procesos puntuales espaciales de Markov o Gibbs. Los procesos puntuales Poisson son un caso especial de los procesos puntuales de Markov, donde la intensidad condicional de Papangelou coincide con la función de intensidad. Por tanto en este trabajo nos limitaremos estrictamente a los residuales de los procesos puntuales Poisson.

Las innovaciones de un modelo paramétrico para un modelo del proceso puntual espacial Poisson X con densidad f_θ , está dada por:

$$I_\theta(B) = n(X \cap B) - \int_B \rho_\theta(u, X) du \quad (2.75)$$

Para cualquier $B \subseteq W$, donde $n(X \cap B)$ denota el número de puntos que caen en B, donde ρ es la intensidad. Las innovaciones I_θ constituyen una medida aleatoria (al azar), con una masa de 1 de cada punto x_i del proceso puntual espacial y un valor negativo $-\rho(u, X)$ para toda ubicación $u \in W$. Satisfaciendo:

$$\mathbb{E}_\theta [I_\theta(B)] = 0 \quad (2.76)$$

Baddeley *et al.* (2005), demostraron además que las innovaciones I_θ están relacionadas directamente con el score (derivada del log-verosimilitud), mediante la siguiente relación:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log\{L(\theta, x)\} = \int_W \frac{\partial}{\partial \theta} \log\{\rho_\theta(u, x)\} dI_\theta u \quad (2.77)$$

Aplicando la fórmula de GNZ (Nguyen y Zessin, 1976) a $h(u, x) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log\{\rho_\theta(u, x)\}$ mostraron que el score tiene media 0 bajo el modelo.

2.8.1 RESIDUALES

Baddeley *et al.* (2005) definieron los residuales *Raw* para procesos puntuales espaciales y sus respectivos residuales escalados, tales como, los residuales inversa ρ , residuales Pearson²⁶ y residuales Pseudoscore²⁷.

Dado un conjunto de datos x y usando el estimado del parámetro general $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$ teniendo en cuenta que $\hat{\rho} = \rho_{\hat{\theta}}$ los residuales para el caso del proceso Poisson son descritos en el Cuadro 5. Para que los residuales Inversa ρ y Pearson estén bien definidos, el estimador $\hat{\theta}$ debe tener la siguiente propiedad $\rho_{\hat{\theta}(x)}(x_i, x) > 0$ para todo $x_i \in x$ y para cualquier patrón x . Los valores cero para $\rho_{\hat{\theta}(x)}(u, x)$ se permiten para $u \notin x$.

Los residuales son también atribuidos a lugares $u \in W$ que no son puntos del patrón. Esto está relacionado con un problema metodológico importante para procesos puntuales. En un conjunto de datos del patrón puntual, la información observada no consiste únicamente en las ubicaciones de los puntos observados del patrón. La ausencia de puntos en otros lugares también es informativa.

²⁶ En analogía con los residuales Pearson para la regresión log-lineal de Poisson

²⁷ Estos residuos son incrementos del score y así corresponden a los residuales score en un GLM.

Cuadro 5: Residuales para procesos puntuales espaciales Poisson.

<i>Residuales</i>	<i>Fórmula</i>
<i>Raw</i>	$R_{\hat{\theta}}(B) = n(x \cap B) - \int_B \hat{\rho}(u, x) du$
<i>Inversa ρ</i>	$R\left(B, \frac{1}{\hat{\rho}}, \hat{\theta}\right) = \sum_{x_i \in x \cap B} \frac{1}{\hat{\rho}(x_i, x)} - \int_B \mathbf{1}\{\hat{\rho}(u, x) > 0\} du$
<i>Pearson</i>	$\left(B, \frac{1}{\sqrt{\hat{\rho}}}, \hat{\theta}\right) = \sum_{x_i \in x \cap B} \frac{1}{\sqrt{\hat{\rho}(x_i, x)}} - \int_B \sqrt{\hat{\rho}(u, x)} du$
<i>Pseudo – score</i>	$R\left(B, \frac{\partial}{\partial \theta} \log(\hat{\rho}), \hat{\rho}\right) = \sum_{x_i \in x \cap B} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log\{\rho_{\theta}(x_i, x)\} \right]_{\theta=\hat{\theta}} - \int_B \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \rho_{\theta}(u, x) \right]_{\theta=\hat{\theta}} du$

Fuente: Baddeley et al. (2005).

2.8.2 PROPIEDADES DE RESIDUALES

Las propiedades de los residuales para modelos de procesos puntuales espaciales son descritas en detalle en Baddeley *et al.* (2005) y Baddeley *et al.* (2007). Nos limitaremos también al caso Poisson.

a. La suma de residuales es igual a 0

Al igual como ocurre en la regresión lineal simple, en el modelo de proceso Poisson homogéneo, estimado por máxima verosimilitud, los residuales Raw son $R_{\hat{\theta}}(B) = n(x \cap B) - n(x)|B|/|W|$. En particular la suma de residuales para la ventana entera W es $R_{\hat{\theta}}(W) = 0$ para cualquier conjunto de datos de patrón puntual x .

De forma más general para un modelo de proceso puntual con tendencia no espacial e intensidad de la forma “log-lineal”, si el modelo es estimado por máxima pseudoverosimilitud²⁸, con $B = W$, implica que $R_{\hat{\theta}}(W) = 0$. Los residuales pseudoscore (para cualquier modelo con parámetro k -dimensional) suma 0 sobre W .

b. La Media Residual

Supóngase que ajustamos un modelo de proceso puntual con parámetro θ a un patrón puntual x usando una estimación del parámetro $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$. Considere que x es en realidad una realización de algún otro proceso puntual X (cuya densidad de probabilidad satisface

²⁸ Para el caso de los modelos de procesos Poisson, la función de pseudoverosimilitud coincide con la verosimilitud. Sin embargo esta no ocurre para procesos con interacción entre puntos tales como los procesos de Markov, en las cual se usa ampliamente el método de Máxima Pseudoverosimilitud en lugar de Máxima Verosimilitud para la estimación de parámetros.

el análogo de la siguiente condición: si $f_{\theta}(x) > 0$ y $y \subset x$ entonces $f_{\theta}(y) > 0$). Entonces los residuales esperados raw, inversa y Pearson son:

$$\mathbb{E}[R(B, 1, \hat{\theta})] = \mathbb{E} \left[\int_B \{\rho(u, X) - \rho_{\hat{\theta}}(u, X)\} du \right] \quad (2.78)$$

$$\mathbb{E}[R(B, \frac{1}{\hat{\rho}}, \hat{\theta})] = \int_B \mathbb{E} \left[\frac{\rho(u, X)}{\rho_{\hat{\theta}(X \cup \{u\})}(u, X)} - \mathbf{1}\{\rho_{\hat{\theta}(X)}(u, X) > 0\} \right] du \quad (2.79)$$

$$\mathbb{E}[R(B, \frac{1}{\sqrt{\hat{\rho}}}, \hat{\theta})] = \int_B \mathbb{E} \left[\frac{\rho(u, X)}{\rho_{\hat{\theta}(X \cup \{u\})}(u, X)} - \sqrt{\rho_{\hat{\theta}(X)}(u, X)} \right] du \quad (2.80)$$

respectivamente (siempre que $\rho_{\hat{\theta}(X)}(x_i, X) > 0$ para todo $x_i \in X$).

Desde que la verdadera intensidad del proceso es $\rho(u) = \mathbb{E}[\rho(u, x)]$, una interpretación es que los *residuales raw* son estimaciones de sesgo (negativo) en el modelado de la intensidad. En el caso del residual inverso este tiene una interpretación más compleja relacionada con el sesgo relativo en la intensidad condicional estimada. Para más detalle consulte Baddeley et al. (2005) y Baddeley et al. (2007)

c. La varianza de los residuales

En un proceso Poisson no homogéneo con intensidad $\rho(u)$, la varianza de las innovaciones raw, inversa o Pearson respectivamente, se reducen a:

$$\text{var}\{I(B, 1, \rho)\} = \int_B \rho(u) du \quad (2.81)$$

$$\text{var}\left\{I\left(B, \frac{1}{\rho}, \rho\right)\right\} = \int_B \frac{1}{\rho(u)} du \quad (2.82)$$

$$\text{var}\left\{I\left(B, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \theta\right)\right\} = |B| \quad (2.83)$$

La primera ecuación es, por supuesto, la varianza y la media de $n(X)$. La última ecuación es análoga al hecho de que los residuales de Pearson clásicos están estandarizados, ignorando el efecto de la estimación de parámetros.

Para la varianza de los residuales, las fórmulas son más engorrosas, involucrando características tanto del modelo ajustado y del proceso puntual subyacente. En un modelo de proceso Poisson con intensidad $\rho_{\theta}(u)$ es ajustada a una realización de un proceso Poisson con intensidad verdadera $\rho(u)$. Entonces los *residuales raw* tienen varianza:

$$\begin{aligned} \text{var}\{R(B)\} &= \int_B \rho(u) du + \int_B \int_B \text{cov}\{\rho_{\hat{\theta}(X)}(u), \rho_{\hat{\theta}(X)}(v)\} dudv \\ &\quad - 2 \int_B \int_B \mathbb{E}[\rho_{\hat{\theta}(X \cup \{u\})}(v) - \rho_{\hat{\theta}(X)}(v)] \rho(u) dv du \end{aligned} \quad (2.84)$$

En el caso especial donde un proceso Poisson homogéneo es ajustado a una realización de un proceso Poisson homogéneo con intensidad θ , la varianza de los residuales son:

$$\text{var}\{R(B, 1, \hat{\theta})\} = \theta |B| (1 - |B|/|W|) \quad (2.85)$$

$$\text{var}\left\{R\left(B, \frac{1}{\hat{\lambda}}, \hat{\theta}\right)\right\} = |B| (|W| - |B|) \mathbb{E}\left[\frac{\mathbf{1}\{n(X) > 0\}}{n(X)}\right] \quad (2.86)$$

$$\text{var}\left\{R\left(B, \frac{1}{\sqrt{\hat{\rho}}}, \hat{\rho}\right)\right\} = |B| (1 - |B|/|W|) \quad (2.87)$$

Tenga en cuenta que las varianzas de los residuales son más pequeñas que las varianzas de las innovaciones correspondientes $\text{var}\{I(B, 1, \theta)\} = \theta |B|$, $\text{var}\{I(B, \frac{1}{\theta}, \theta)\} = |B|/\theta$ y $\text{var}\{I(B, \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \theta)\} = |B|$. Esto es análogo a la deflación de la varianza residual en un modelo lineal. Para más de detalle consulte Baddeley et al. (2005) y Baddeley et al. (2007).

d. Errores no correlacionados

Los residuales espaciales no tienen incrementos independientes. Esto abarca también a los procesos de Poisson y muchos otros ejemplos. Baddeley et al. (2005) sospechan que las innovaciones y residuales satisfacen la ley de los grandes números y el teorema del límite central, cuando la ventana de muestreo W se expande.

2.8.3 DIAGNÓSTICO BASADO EN GRÁFICOS

El análisis gráfico de los residuales para modelos de procesos puntuales espaciales, ha sido propuesto en Baddeley et al. (2005) de forma similar a lo que ocurre para otros modelos estadísticos, especialmente la regresión logística. Un gráfico se utiliza para evaluar cada componente en el modelo estimado, tendencia espacial, dependencia de covariables, interacción interpuntos y otros efectos.

a. *Gráfico de los residuales espaciales.*

Baddeley et al. (2005), plantean un gráfico de la medida de los residuales en $x_i \in x$ que son representados por círculos con radios proporcionales a la medida del residual del modelo, como si se tratase de un patrón puntual marcado. Para el caso de otras ubicaciones $u \in W$ los residuales representan una densidad negativa, por tanto en el gráfico además se agrega como base una imagen pixel del componente de densidad. Los gráficos de marcas algunas veces identifican datos de puntos extremos, sin embargo la interpretación de los residuales se basa primordialmente en la suma sobre una subregión B .

Otra alternativa aún mejor es suavizar la medida del residual, tomando un kernel suavizado (una densidad de probabilidad sobre \mathbb{R}^2). El *campo residual suavizado* en la ubicación u es: $s(u) = e(u) \int_W k(u - v) dR(v, \hat{h}, \hat{\theta})$, donde \hat{h} representa una función de escalamiento de los residuales R y $e(u)$ es una corrección para efectos de borde. Por su la cantidad análoga a las innovaciones tiene media cero.

Si el modelo estimado es el correcto, se espera que $s(u) \approx 0$. En el caso de los residuales raw , $s(u) = e(u) [\sum_{x_i \in x} k(u - x_i) - \int_W k(u - v) \hat{\rho}(v, x) dv] = \rho^*(u) - \rho^+(u)$, donde $\rho^*(u)$ es un estimador kernel suavizado no paramétrico de la función de intensidad del proceso puntual y $\rho^+(u)$ es una versión kernel suavizada del estimador paramétrico de la intensidad condicional. Estos dos estimados de intensidad podrían ser aproximadamente iguales si el modelo ajustado es el correcto. Los valores positivos de $s(u)$ sugieren que el modelo subestima la intensidad. Para más detalle consulte Baddeley et al. (2005).

b. *Gráficos de variables no incluidas en el modelo*

Para un modelo de proceso puntual, por analogía a lo que ocurre en modelos lineales, un gráfico de los residuales contra una covariable espacial, o una de las coordenadas espaciales ayudan a investigar la presencia de tendencia espacial.

Para una covariable espacial $Z(u)$ definida en cada ubicación $u \in W$, evaluamos la medida de residual en cada conjunto subnivel $W(z) = \{u \in W : Z(u) \leq z\}$, conduciendo a una función de residual acumulada $A(z) = R\{W(z), \hat{h}, \hat{\theta}\}$, la cual podría ser aproximadamente cero si el modelo estimado es el correcto. En el caso de los residuales

raw, $A(z) = n\{x \cap W(z)\} - \int_{W(z)} \hat{\rho}(u, x) du$. La función $A(z)$ tiene aproximadamente media cero bajo el modelo estimado.

Los gráficos a su vez pueden ser dotados de límites $\pm 2\sigma$ basados en la varianza de las innovaciones bajo un proceso Poisson no homogéneo. Para más detalle consulte Baddeley et al. (2005).

III. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 MATERIALES

3.1.1 INSUMOS DE DATOS

Los insumos para el desarrollo de la presente tesis la constituyen los siguientes conjuntos de datos:

- La población de la ciudad de Lima, según el Censo de Población y Vivienda 2007, agregado a nivel de manzanas con las respectivas ubicaciones geográficas (long. y lat. del centro), proporcionada por el INEI.
- Conjunto de datos espaciales de los límites distritales de la ciudad de Lima.
- Conjunto de datos de los hechos delictivos registrados en el 2013 y 2014, con sus respectivas coordenadas geográficas. Los datos fueron obtenidas por Giancarlo Díaz Pardo, policía en actividad, junto a la plataforma Datea, para crear el mapa del delito de Lima, con el objetivo de que las comisarías utilicen la información y refuercen la seguridad en estos puntos. En este aplicativo, los propios ciudadanos de Lima que han sido víctimas de robo²⁹ podían ubicar en un mapa web, el lugar del incidente. Los datos fueron descargados con ayuda del Software Tableau Public de la web: <http://elcomercio.pe/lima/seguridad/cercado-y-surco-registran-mas-delitos-segun-sondeo-web-noticia-1740950>.
- Conjunto de datos de las comisarias obtenidas del portal Web del Ministerio de Interior a fines del 2015. Posteriormente fueron georreferenciadas utilizando el aplicativo web Google Maps y se añadió además las ubicaciones de las Serenazgos y centros de seguridad ciudadana existente en Google Maps.

²⁹ divididos en sus diferentes modalidades: arrebato, bujiazos, cogoteo, raqueto, etc.

- Conjunto de datos del Presupuesto Institucional de Apertura (PIA) 2014, orientadas al Orden público, detallada para cada Municipalidad. Los datos fueron descargados del aplicativo web, Consulta Amigable del Ministerio de Economía y Finanzas.

3.1.2 MATERIAL DE ESCRITORIO

- Laptop portátil Core i5 Toshiba
- Programa Estadístico: R Project versión 3.2.5.

3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA

La población bajo estudio está constituida por el conjunto de todos los puntos (ubicaciones) en donde se registró un hecho delictivo durante los años 2013 y 2014 en la ciudad de Lima Centro y Residencial. Específicamente, el área de estudio o ventana de observación W se muestra en la Figura 4 y constituye la región conformada por los distritos de Lima Centro (La Victoria, Lima, Lince, Breña, Rímac) y Lima residencial (Barranco, Jesús María, La Molina, Magdalena, Miraflores, Pueblo Libre, San Borja, San Isidro, San Luis, San Miguel, Santiago de Surco, Surquillo).

El lugar de ocurrencia de un hecho delictivo en W , corresponde a un punto y constituye un vector aleatorio representado por sus coordenadas geográficas (Longitud, Latitud). Se asume que el tamaño de la población N , es grande y desconocido por distintos motivos, por ejemplo, no todas las víctimas se atreven a denunciarlo y/o reportarlo.

Por tanto, si se toma todos los $n = 1082$ puntos recolectados en los años 2013 y 2014 se puede considerar a estos como una muestra aleatoria de toda la población. Este mismo criterio es utilizado en la aplicación de Minería de Datos.

Así en esta tesis, se considera como unidad de análisis un punto en los cuales se registró un hecho delictivo durante los años 2013 y 2014 y que fueron reportados y ubicadas por las víctimas a través del aplicativo web Datea al interior de W . Cabe recalcar que esto no debe confundirse con la metodología de procesos puntuales espaciales, para el cual este conjunto de puntos en si representa una única realización del proceso puntual espacial

bidimensional, lo cual difiere notablemente de los estudios clásicos donde cada dato se considera una observación y el conjunto la muestra.



Fig. 4: Ventana de observación. Constituye la región situada al interior del borde Gris (W).

3.3 IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES

Las covariables espaciales utilizadas para el presente trabajo de investigación, son observadas y registradas para cada celda (pixel) de forma cuadrada de 20 metros de lado para todos los lugares del espacio de estudio W .

3.3.1 VARIABLE DEPENDIENTE

ρ_i = Intensidad de delitos, es decir, el número de delitos por km^2 registrado en un punto cualesquiera.

3.3.2 VARIABLES INDEPENDIENTES – ESPACIALES

Z_1 = Distancia (km) de un punto cualesquiera a un puesto de seguridad más cercano.

Z_2 = Distancia (km) de un punto cualesquiera a un límite distrital.

Z_3 = Presupuesto Institucional per-cápita (nuevos soles) destinada al orden interno.

Z_4 = Densidad poblacional existente en un punto cualesquiera

3.4 FORMULACIÓN DE HIPÓTESIS

3.4.1 HIPÓTESIS GENERAL

El patrón puntual de hechos delictivos, se ajusta de mejor forma a un modelo de un proceso puntual espacial Poisson no homogéneo.

3.4.2 HIPÓTESIS ESPECÍFICA

1. Los hechos delictivos se encuentran distribuidos de forma no homogénea a lo largo de la ciudad de Lima.
2. En los lugares con mayor densidad poblacional, existe mayor ocurrencia de hechos delictivos.
3. La inversión en orden interno efectuado por los Municipios, favorece a la reducción de la delincuencia.
4. Los límites jurisdiccionales (distritales) favorecen al incremento de los hechos delictivos.
5. La distribución espacial de las comisarías y serenazgos, tiene efecto reductor en los hechos delictivos.
6. Existe tendencia espacial de los hechos delictivos.

3.5 ESPECIFICACIÓN DEL MODELO

3.5.1 PROCESO PUNTUAL ESPACIAL POISSON NO HOMOGÉNEO

El modelo planteado en este trabajo de investigación corresponde al proceso puntual Poisson no homogéneo, donde la dependencia de covariables espaciales, se expresó a partir del término de la intensidad que fue modelada en su forma loglineal, así:

$$\rho(u) = \exp(\beta_0 + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 + \beta_4 Z_4)$$

donde u representa cualquier punto de la ventana de observación W . $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ representan los coeficientes del modelo asociados al intersepto y a las covariables espaciales respectivamente.

3.5.2 PAQUETES DE “R” UTILIZADOS

Los principales paquetes del programa estadístico R, utilizados en la presente tesis fueron los siguientes:

1. rgdal y maptools para la lectura de datos espaciales en formato .shp
2. raster: Para el manejo y grafico de datos en forma de imágenes raster.
3. ggplot2: Para el mapeo de datos y gráficos en alta calidad incluidas imágenes satélite.
4. spatstat: Para análisis estadísticos de patrones puntuales espaciales.
5. sp:Para el manejo de datos espaciales.

3.6 METODOLOGÍA DE ANÁLISIS ESTADÍSTICO

1. Análisis Exploratorio Espacial de Datos
2. Mapeo de puntos
3. Estimación de la intensidad de hechos delictivos
4. Pruebas de Aleatoriedad Espacial Completa
5. Estimación de las estadísticas de resumen de segundo orden
6. Estimación de Modelos
7. Selección de los modelos.
8. Diagnósticos de residuales

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 ANÁLISIS EXPLORATORIO ESPACIAL DE LOS DATOS

En primer lugar se asumió que existe un proceso puntual espacial que determina los lugares en donde ocurren los hechos delictivos y su distribución en la ciudad de Lima. Una realización de tal proceso puntual o patrón puntual fue observada³⁰ entre los años 2013 y 2014. Bajo esta perspectiva, cabe mencionar que el número de delitos, y a su vez su ubicación, puede variar si se observa en otro momento del tiempo (otros años), obteniéndose así otro patrón puntual.

El patrón puntual espacial bidimensional en estudio, estuvo conformada por el conjunto $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde cada punto x_i representa la ubicación de un hecho delictivo con coordenadas geográficas $(\text{long}_i, \text{lat}_i)$ en el sistema WGS 1984, posteriormente estas fueron transformadas a un Sistema de Coordenada Proyectadas (en el plano y en metros), WGS 1984 UTM zona 18S. La cardinalidad de x , es decir, el total de hechos delictivos fueron $n = 1082$ cuyas coordenadas de ubicación geográficas para cada punto se detalla en el Anexo 1.

El análisis exploratorio de patrones puntuales espaciales y la validación de los modelos ajustados se basan a menudo en estimaciones no paramétricas de diversas estadísticas de resumen. Así, el análisis exploratorio de los datos espaciales empieza con una representación gráfica del patrón puntual a través de un mapa de puntos con el fin de obtener una descripción vaga sobre el tipo de patrón puntual (aleatorio, regular o si existen clústeres), seguidamente se enfoca en buscar discrepancias con un modelo de Poisson utilizando estimaciones no paramétricas de las estadísticas de resumen.

4.1.1 MAPEO DE PUNTOS

Constituye uno de los primeros pasos en el análisis de patrones puntuales espaciales. Para nuestro caso de estudio los hechos delictivos (eventos observados) están representados en

³⁰ Bajo esta perspectiva, cabe mencionar que el número de delitos, y a su vez su ubicación, puede variar si se observa en otro momento del tiempo (otros años), obteniéndose así otro patrón puntual.

forma de puntos tal cual se muestra en la Figura 5. La ventana de observación W , es todo el espacio territorial ocupado por los distritos de Lima Centro y Residencial delimitada por una línea de color gris.

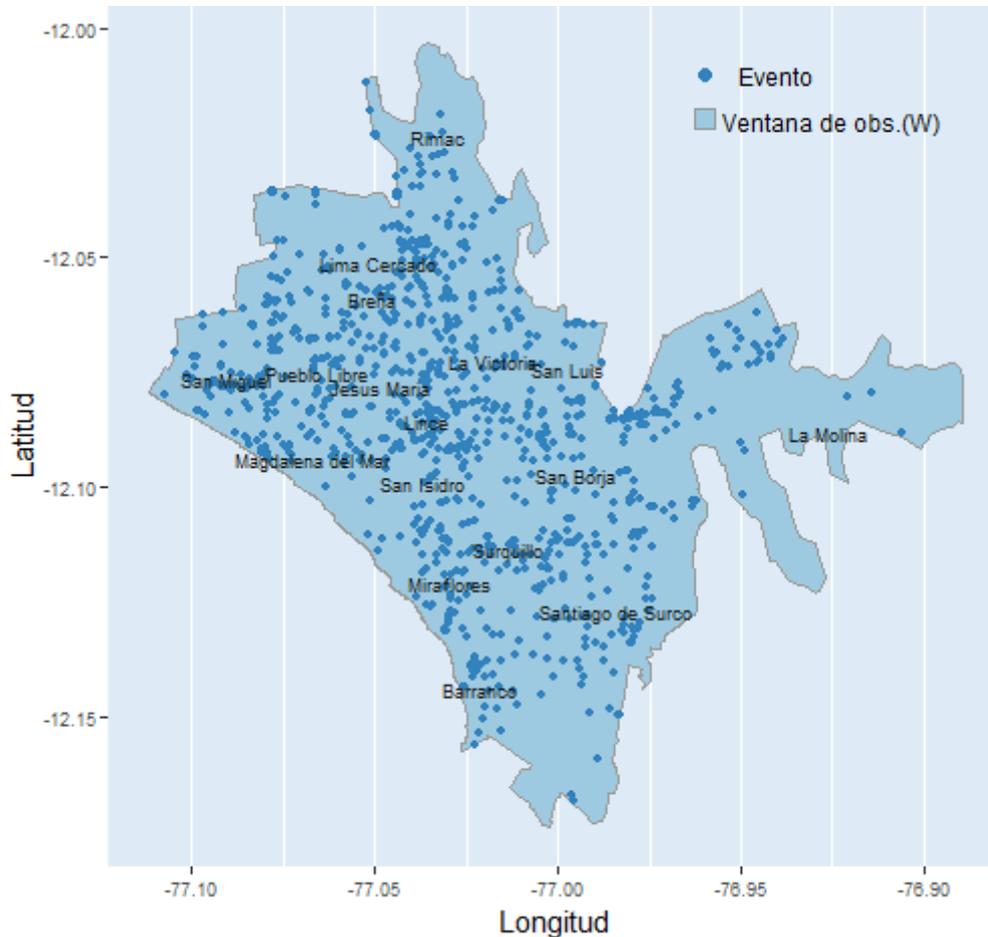


Fig. 5: Patrón puntual bidimensional ($d = 2$) de hechos delictivos, donde la ventana de observación W representa las zonas de Lima Centro y Residencial coloreadas en color celeste.

A simple vista, se observan zonas con mayor concentración de puntos, por ejemplo, en los distritos de Lima Cercado y Lince. En el caso opuesto, es decir, las zonas con menor concentración de puntos son los distritos de La Molina y Santiago de Surco. Estos hechos dan una impresión que el Proceso Puntual Espacial de hechos delictivos no sería completamente aleatorio, es decir falta homogeneidad en la distribución espacial de puntos. Sospechamos que sus causas podrían atribuirse a una alta densidad poblacional, pocas comisarias, poca inversión de parte del municipio para establecer el orden interno entre otras. Este tema será abordado con detalle en las siguientes secciones.

4.1.2 ESTIMACIÓN DE LA INTENSIDAD

Para cuantificar la ocurrencia de los hechos delictivos a través del espacio de estudio, es común utilizar la intensidad de puntos, es decir, el número de puntos por unidad de área. Previamente fue necesario transformar tanto la ventana de observación W y los elementos del patrón puntual al Sistema Proyectado de coordenadas WGS 1984 UTM zona 18S, lo cual nos permitió obtener la intensidad en unidades conocidas tales como: número de puntos por metro² y/o por km². Estos conjuntos de datos fueron utilizados para el desarrollo de las siguientes secciones.

En un primer instante, asumiendo que el proceso puntual espacial es *Completamente Aleatorio*, la estimación de la intensidad según la expresión (2.41), es de 6.56 hechos delictivos por km², esto se detalla en el siguiente Cuadro 6:

Cuadro 6: Estadísticas de resumen del patrón puntual bidimensional homogéneo.

Tipo	Frecuencia de puntos	Área de W (Km ²)	Intensidad (puntos por Km ²)
Hechos delictivos	1082	164.98	6.56

Fuente: Elaboración propia.

En segundo lugar, dado que los puntos parecieran no estar distribuidos homogéneamente en el espacio de estudio (pareciera existir zonas con mayor concentración de hechos delictivos), se realizó la estimación de la intensidad de forma no paramétrica³¹ a través de un kernel Gaussiano estándar (para una ancho de ventana, $h = 400$ m). Los resultados se muestran en la Figura 6. En esta imagen se observa que las zonas con mayor incidencia de hechos delictivos, fueron los distritos de Lima Cercado y Lince. Por otra parte en la barra de colores, se observa que la intensidad fluctúa desde cero (en color azul) hasta un poco más de 30 hechos delictivos/km² (en color rojo). Así las zonas con mayor incidencia en el espacio de estudio, son representadas en colores cercanos a rojo.

³¹ La intensidad no paramétrica por el método kernel, es calculada para un fino y regular grid de puntos, que son los centros de los píxeles de 20 metros de lado. Estos en conjunto son visualmente representados en la forma de una imagen raster.

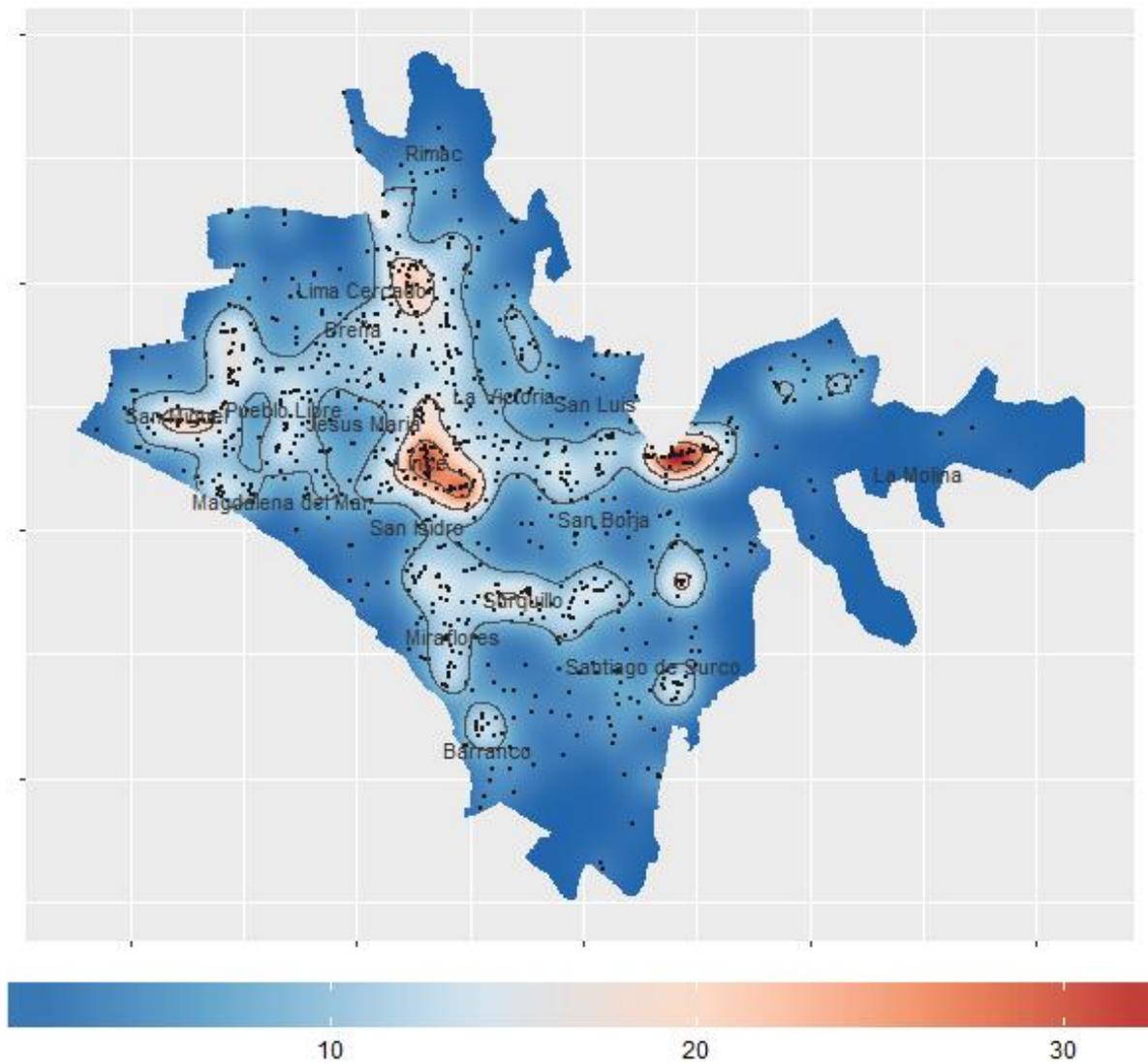


Fig. 6: Intensidad de hechos delictivos (Puntos/km²) para $h = 0.4$ km.

Con fines de identificar y tener una mirada más real de las zonas con mayores ocurrencias de hechos delictivos, se superpuso la intensidad por encima de la imagen satelital tal cual se muestra en la Figura 7. A su vez, las zonas con mayor incidencia fueron etiquetadas con los nombres A, B y C.

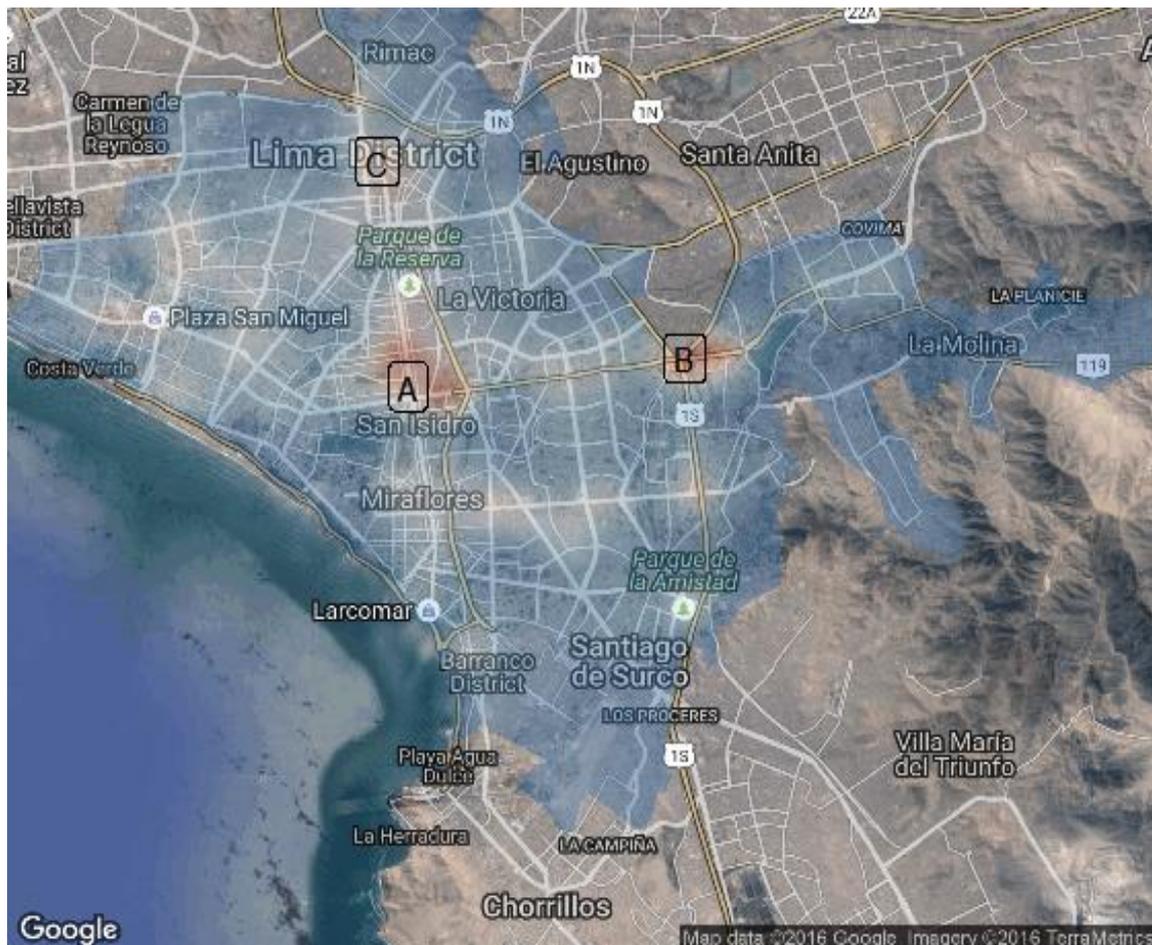


Fig. 7: Mapa de la Intensidad de hechos delictivos con fondo de imagen satélite Google. Los puntos A, B y C representan las zonas con mayores influencias.

Una mirada más detallada aún de los puntos A, B y C, se muestra en la Figura 8. En la parte superior, se observa la zona A, identificándose que los hechos delictivos principalmente han ocurrido a lo largo de la Av. Arequipa hasta llegar al cruce con la Av. Juan de Zela, cuya intensidad fluctúan en el rango de 25 a 30 hechos delictivos / km², aproximadamente. En la parte inferior izquierda, se observa la zona B, identificándose que los hechos delictivos principalmente han ocurrido en la zona conocida como el Trebol de Javier Prado con intensidades similares al caso A y finalmente la figura del lado derecho muestra la zona de Lima Cercado.

De esta forma, la intensidad de un proceso puntual estimada por la forma no paramétrica y el uso de las imágenes satelitales nos ayudaron en gran medida a identificar las zonas específicas con mayores incidencias de hechos delictivos. Por otro lado el valor que toma

esta nos ayuda a tener una idea de la magnitud del problema en cada una de las zonas identificadas.

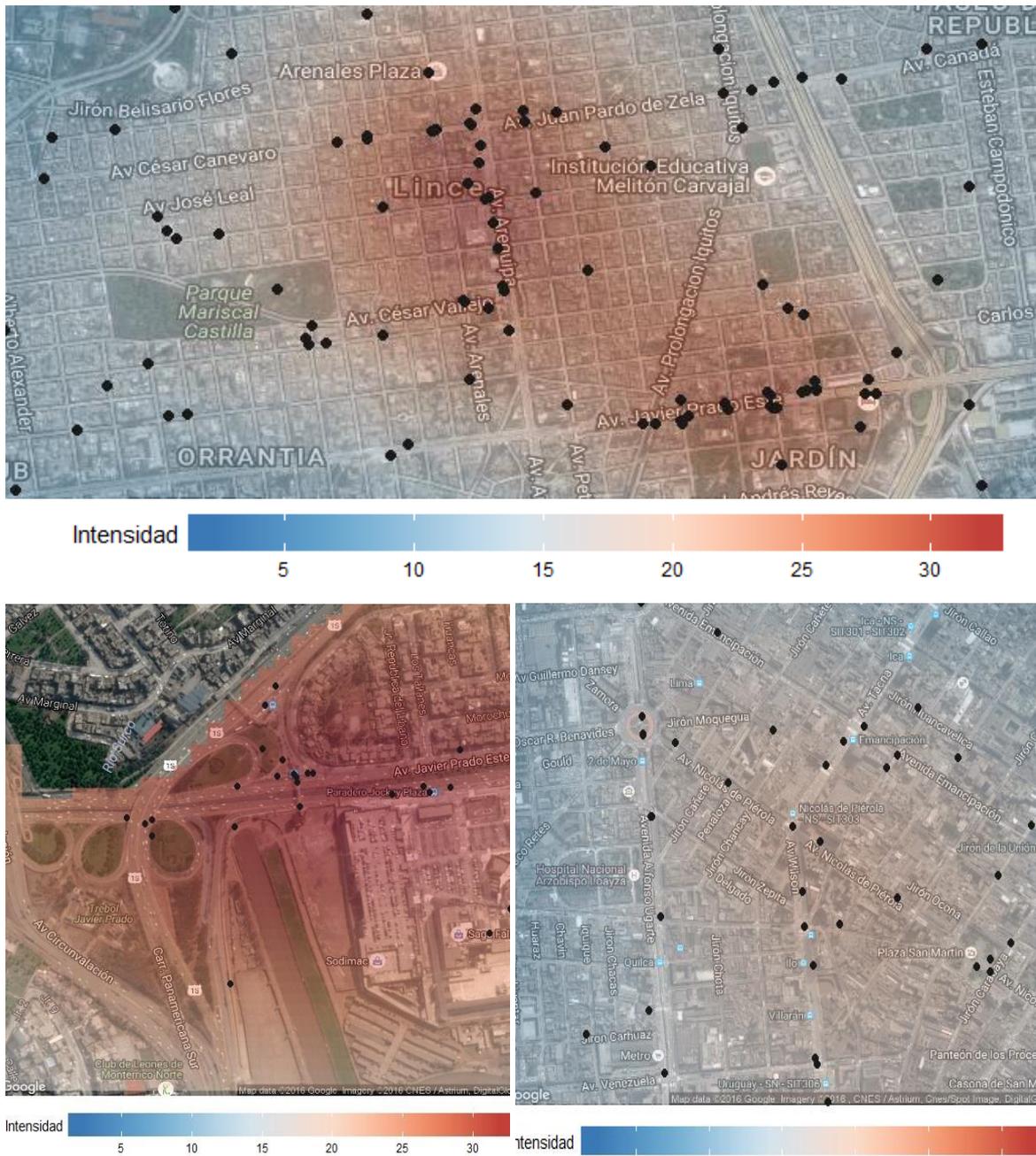


Fig. 8: Mapa de la Intensidad de hechos delictivos de las zonas con mayores incidencias. La figura superior es del punto A, inferior izquierda es del punto B y el último corresponde al punto C.

4.1.3 ESTADÍSTICAS DE RESUMEN DE SEGUNDO ORDEN

El análisis exploratorio de patrones puntuales espaciales y la validación de los modelos ajustados se basan en estimaciones no paramétricas de diversas estadísticas de resumen.

Por ejemplo, el punto de partida en el análisis de un proceso puntual consiste en buscar la discrepancia con un modelo de Poisson utilizando estimaciones no paramétricas de estadísticas de resumen. Entre las estadísticas de resumen de segundo orden más utilizadas para procesos puntuales se encuentran las funciones de correlación por pares y las llamadas funciones - K y L , las cuales se muestran en la Figura 10 y la Figura 9, respectivamente para nuestro caso de estudio. Por otra parte las estadísticas de resumen basadas en las distancias entre puntos como las llamadas funciones - F , G , y J , se muestran en la Figura 11.

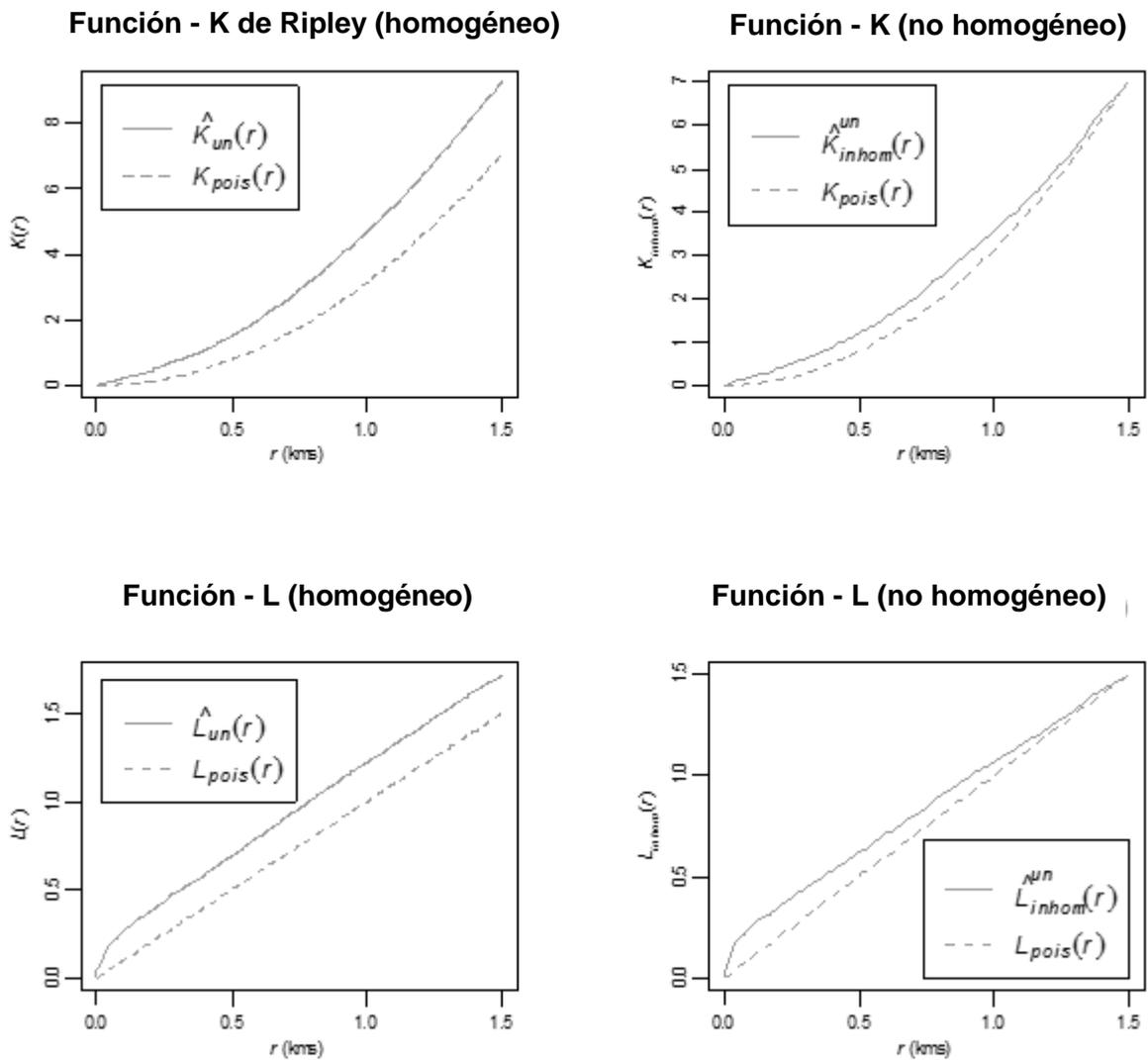


Fig. 9: La función K y L , para los datos de hechos delictivos. Al lado izquierdo para el caso homogéneo y el lado derecho para el caso no homogéneo.

La función K y la función $-L$ están en correspondencia uno-a-uno debido a que L es una transformación³² de K . Para el caso homogéneo se muestran en el lado izquierdo de la Figura 9 y en el lado derecho para el caso no homogéneo. En el caso homogéneo, $\rho K(r)$, es el número esperado de otros puntos dentro de la distancia r desde el origen dado que X tiene un punto en el origen. En general, los valores para valores $\hat{L}(r) - L_{pois} > 0$ indican agregación o clustering en distancias menores de r . Para nuestro caso de estudio los valores estimados de L son superiores a los valores teóricos, la cual corrobora nuestra sospecha de la existencia de agregación o clustering de hechos delictivos hasta una distancia menor a 1.5 km, sin embargo esta clusterización es más notoria en distancias cercanas a 500 m.

El hecho, que existan agregación de puntos en ciertos lugares, indica que existen zonas específicas que son las más preferidas por los delincuentes para llevar a cabo sus hechos delictivos. Esta preferencia puede deberse a diversos factores, entre ellas se asumen que son los lugares con: poca seguridad, poca inversión en orden interno, cercanas a un límite distrital, bastante aglomeración de personas (densidad poblacional) entre otras.

La **función - g de correlación par**, es otra estadística de resumen usada a menudo en lugar de la función - L o K , debido a que es más fácil de interpretar ya que la función - K , es una función acumulada. En general, al menos para pequeños valores de r , $g(r) > 1$ indica agregación o clustering a distancias r , y $g(r) < 1$ regularidad a tales distancias.

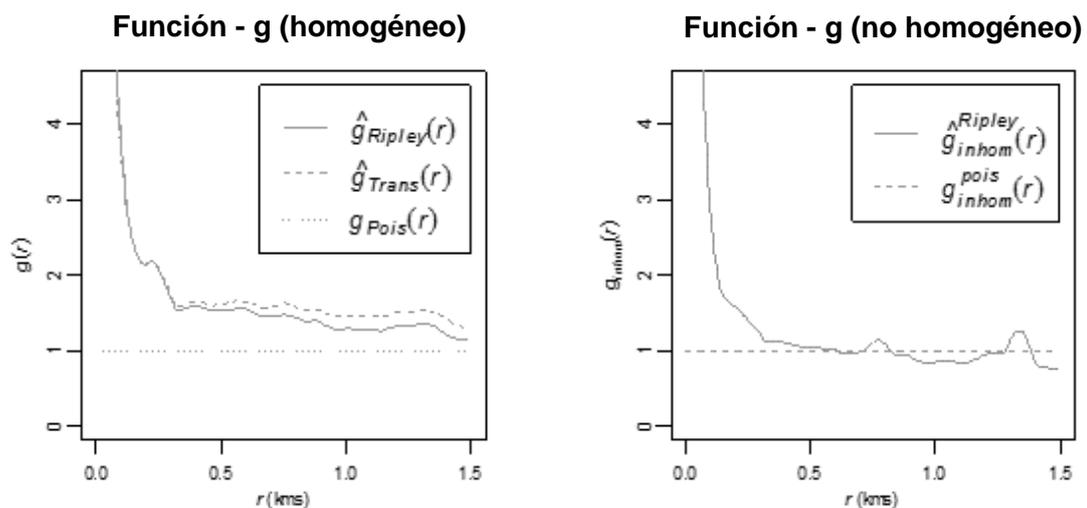


Fig. 10: La función - g , de correlación por pares, para los datos de hechos delictivos. Al lado izquierdo para el caso homogéneo y el lado derecho para el caso no homogéneo.

³² Consulte la ecuación (2.15)

Los valores estimados de la función $-g$, en nuestro caso de estudio para distintos valores de r se muestran en la Figura 10. En lado derecho para el caso no homogéneo, se observa que para valores cercanos a 0.4 km (es decir 400 metros), $\hat{g}(r = 0.4) > 1$, lo cual corrobora la presunción de la existencia de clústeres o agregación de hechos delictivos.

Otras estadísticas de resumen son aquellas que están *basadas en las distancias entre puntos*, para nuestro caso de estudio se muestran en la Figura 11.

La función $-G$ de distancia al vecino más cercano, para nuestro caso de estudio, se muestra en la parte superior-derecha de la Figura 11. En esta se observa que la función teórica G_{pois} , se encuentra alejada de los valores estimados de G , lo cual indica que no existe Aleatoriedad Espacial Completa (CSR) en el patrón puntual de hechos delictivos. Por otra parte, se determinó que a menos de 250 metros, en el 80% de los casos ocurrió otro hecho delictivo, lo cual indica que los hechos delictivos se dan en distancias cercanas unas de otras.

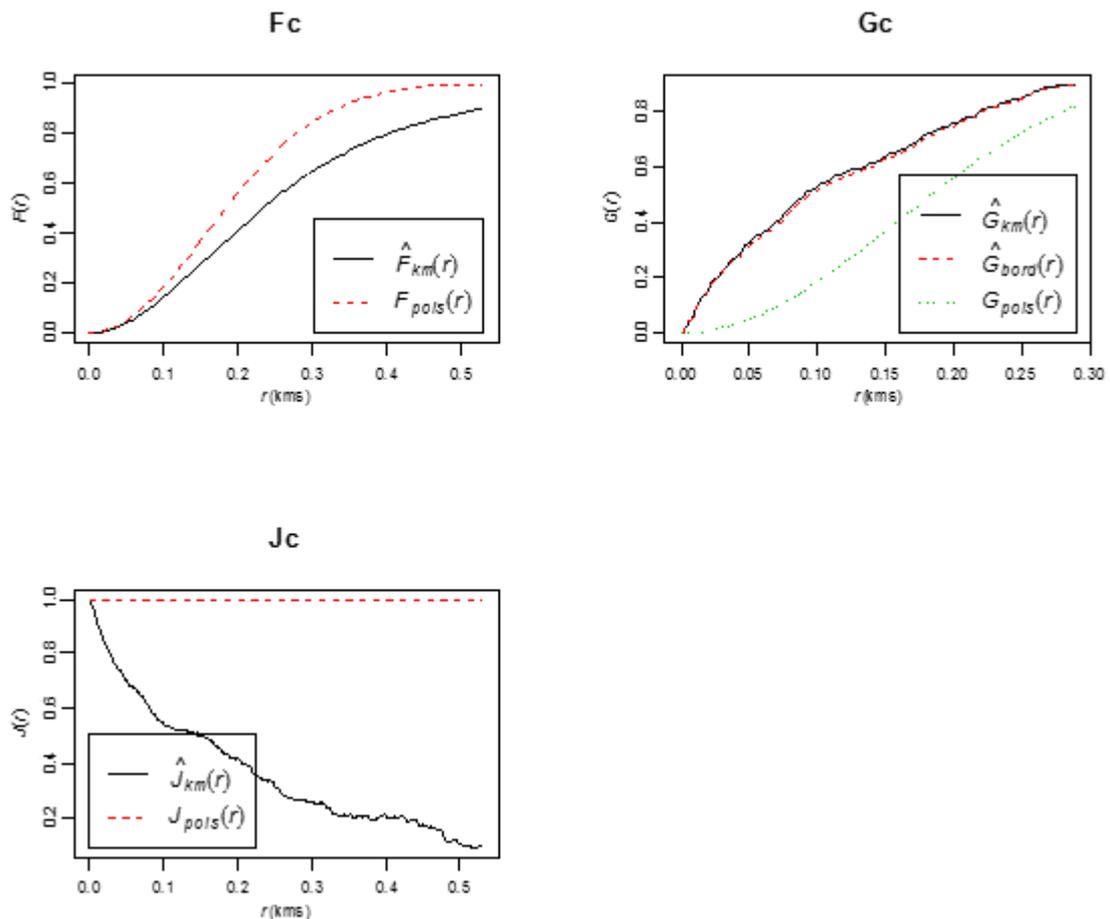


Fig. 11: La función $-F$, G y J , basado en distancia entre puntos.

Con respecto a la función - F , esta representa la distribución de un punto o lugar cualesquiera de la región de estudio hasta el lugar más cercano donde se registró un hecho delictivo. Así, a partir de la Figura 11, se observa que para un punto arbitrario dentro de la ventana de observación y hasta una distancia de 300 metros, existía una probabilidad del 60% que se registre un hecho delictivo en él, durante el periodo de estudio.

En general, los valores de las funciones - F y G son altos a distancias cortas y además dado que $J(r) < 1$, esto indica y corrobora la existencia de agregación o clústering en el patrón puntual de hechos delictivos.

4.1.4 PRUEBAS DE ALEATORIEDAD ESPACIAL (CSR)

Las pruebas estadísticas de Aleatoriedad Espacial Completa, se realizaron a través del método basado en tres tipos de cuadrantes tales como los polígonos distritales, cuadrantes irregulares y los diagramas de Dirichlet. Los resultados se muestran en el Cuadro 7, para los cuales las hipótesis planteadas son:

H_0 : La intensidad es homogénea (CSR)

H_1 : Es un proceso Poisson no homogéneo.

Cuadro 7: Pruebas de aleatoriedad espacial completa, basado en conteo de cuadrantes

Tipo	Nro. De polígonos	χ^2	Df	p-value
Polígonos dist.	17	333.27	16	2.2e-16
Cuadrados irreg.	12	232.85	11	2.2e-16
Dirichlet	9	194.62	8	2.2e-16

Fuente: Elaboración propia.

A partir de los resultados, dado que $p\text{-value} < 0.01$, en cada uno de los tipos de cuadrantes, se rechaza la hipótesis nula. Es decir, existe suficiente evidencia estadística para afirmar que el patrón puntual de hechos delictivos es una realización de un proceso Poisson no homogéneo subyacente en la región de estudio, es decir, la intensidad es no homogénea.

Gráficamente, la falta de homogeneidad puede observarse para cada tipo de cuadrante, en la Figura 12. A su vez se observan las etiquetas de los valores observados (izquierda), esperados y los residuales correspondientes. Los polígonos son representados en color gris de acuerdo a la intensidad de hechos delictivos, lo cual permite identificar los cuadrantes

con mayor incidencia delictivas. Así en el caso de polígonos distritales, estas encuentran representadas en mayor grado en los distritos de Lima Cercado, Breña, Lince y Surquillo.

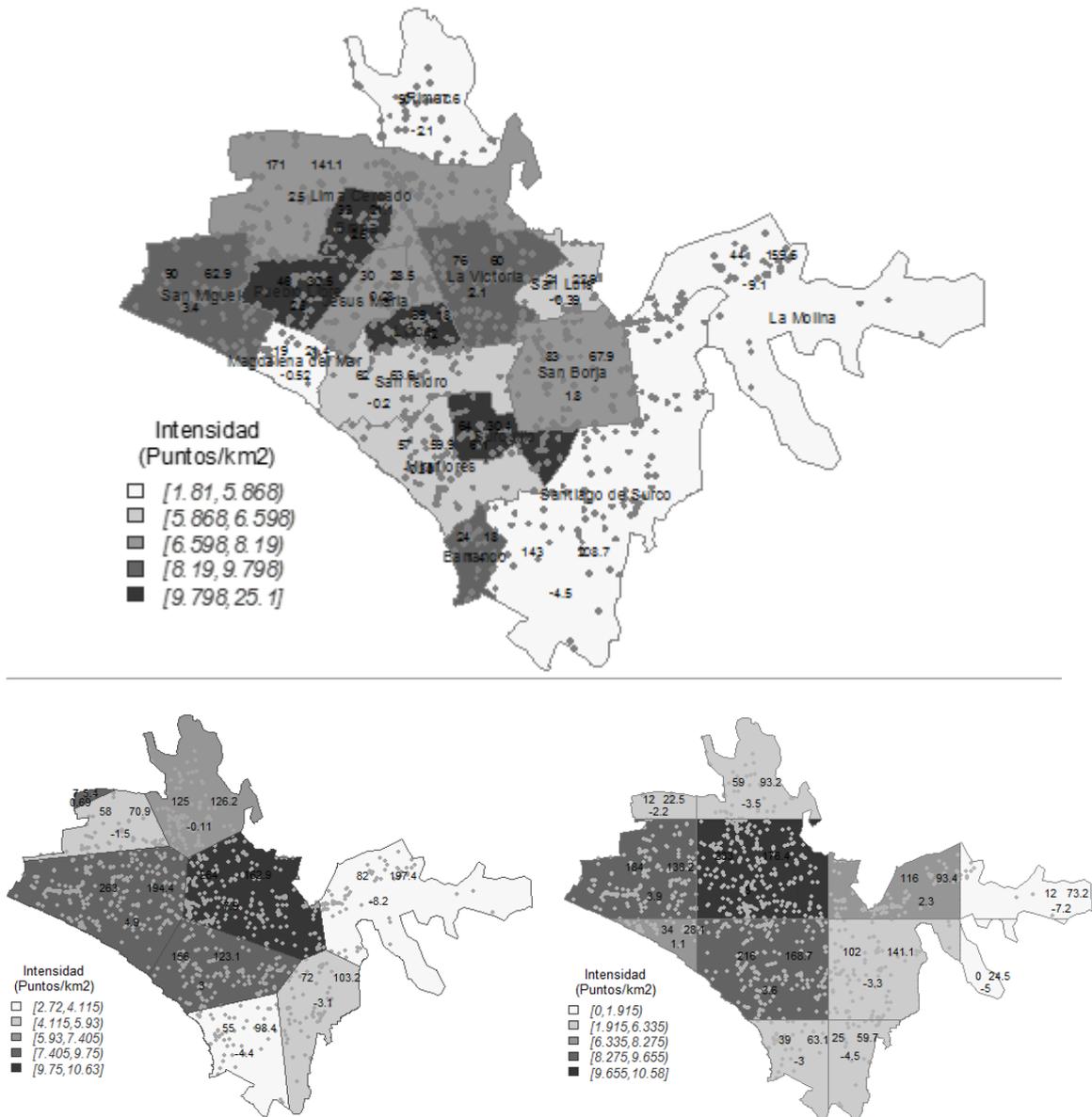


Fig. 12: Mapa de la intensidad basado en cuadrantes. En la parte superior los cuadrantes están de acuerdo a la configuración distrital, en la parte inferior - izquierda para el caso de teselación de Dirichlet y al lado derecho para el caso de cuadrantes (tiles).

Otra prueba importante de bondad de ajuste, es la prueba de Kolmogorov – Smirnov, espacial, las hipótesis son esencialmente las mismas de CSR. Esta se realizó utilizando como covariable espacial a la coordenada de longitud. Los resultados se muestran en el Cuadro 8.

Cuadro 8: Prueba de Kolmogorov – Smirnov, correspondiente a la abscisa (longitud).

Tipo	D	p-value
Spatial Kolmogorov-Smirnov	0.157	2.2e-16

Fuente: Elaboración propia

dado que el $p\text{-value} < 0.01$, existe suficiente evidencia estadística para mencionar que existe tendencia espacial a lo largo de la coordenada de longitud, i.e., no existe aleatoriedad espacial completa (CSR).

Las distancias entre los valores observados y los teóricos, se muestran en la gráfica de Kolmogorov-Smirnov, Figura 13, donde se observa que las distancias máximas para valores de la abscisa (longitud) están situadas entre 285 – 290 km del sistema de coordenadas proyectadas UTM 18S.

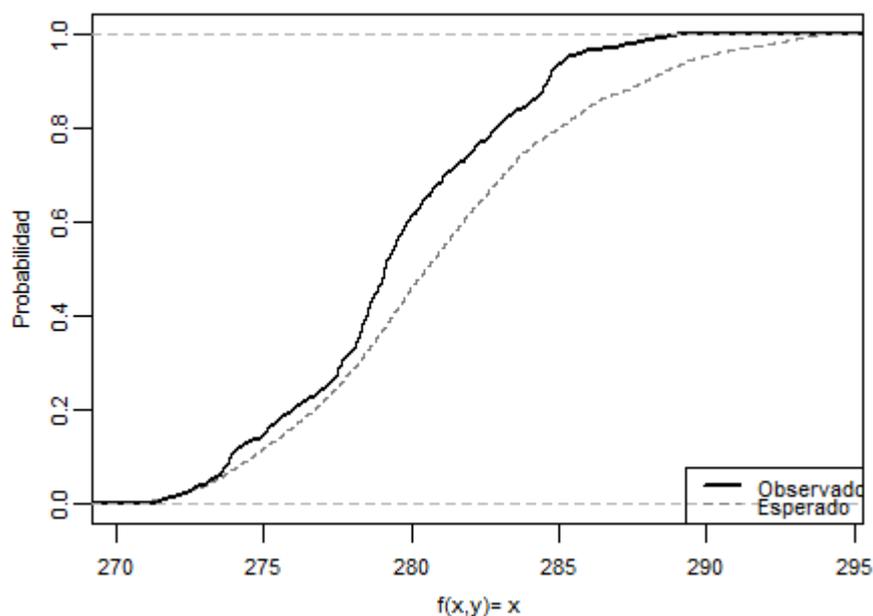


Fig. 13: Gráfica de Kolmogorov-Smirnov para evaluar la tendencia espacial en la coordenada (x).

4.2 ESTIMACIÓN DE MODELOS

Las covariables espaciales empleadas para la estimación de modelos, se muestran en la Figura 14. En la dirección de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, los gráficos representan: la distancia a un centro de seguridad (Z_1 , en km), la distancia a un límite distrital (Z_2 , en km), el presupuesto asignado a seguridad ciudadana per cápita (Z_3 , en nuevos soles) y finalmente la densidad poblacional (Z_4 , en población/km², para $h = 0.4$

km). Las covariables espaciales llevan superpuestos los puntos del patrón puntual de hechos delictivos, con el fin de verificar su dependencia con respecto a las covariables espaciales. En el caso de las distancias hacia una comisaria, se observa que los hechos delictivos en su mayoría están un poco alejados de esta. En el caso de la distancia a un centro de seguridad, un buen número de puntos se muestran a distancias reducidas. Respecto a la variable de presupuesto para el orden interno, aquellos distritos con menor inversión, muestran una mayor concentración de puntos y finalmente los puntos parecieran estar presentes mucho más en zonas con mayor densidad poblacional.

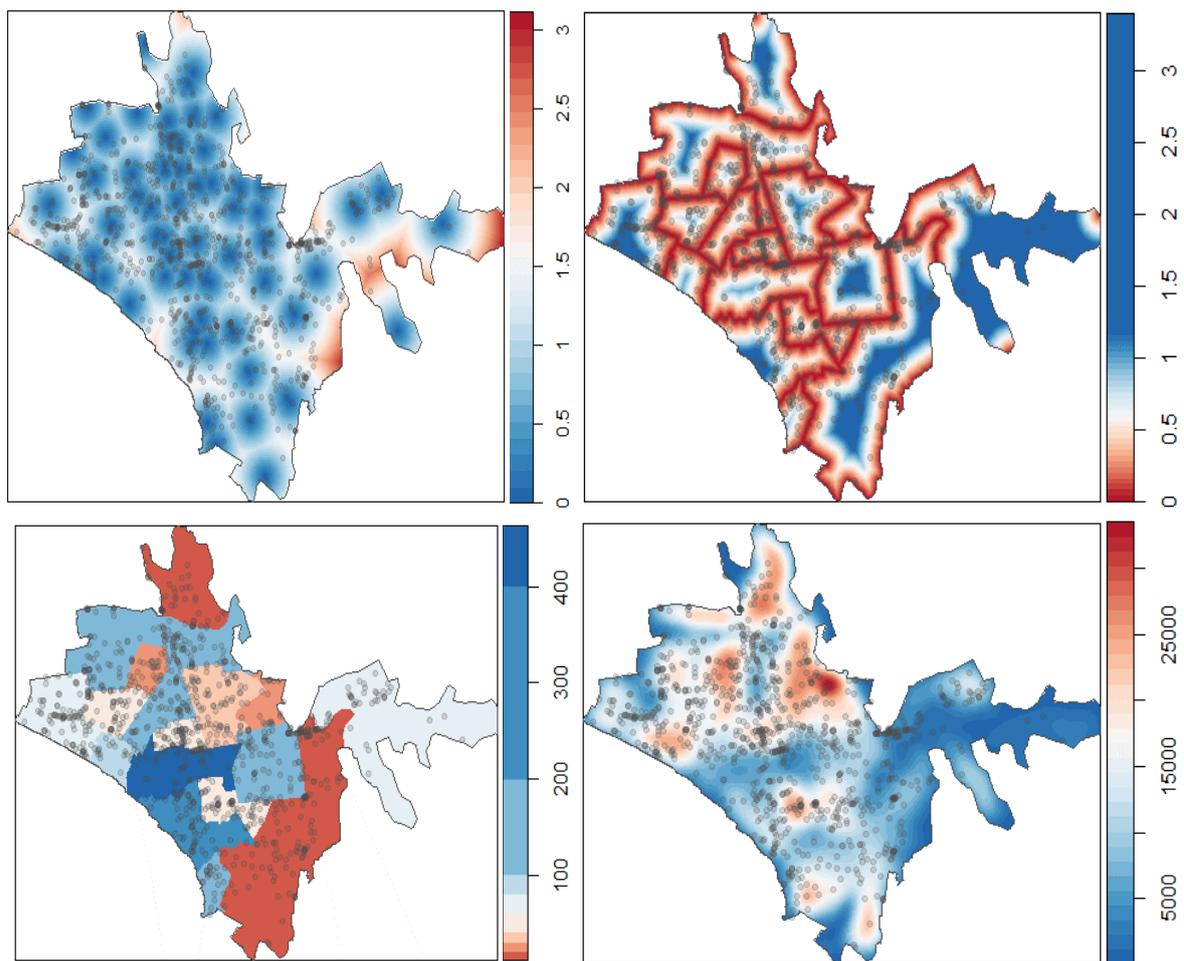


Fig. 14: Mapas de covariables espaciales donde se superpone el patrón puntual de hechos delictivos (Fuente: Elaboración propia)

Para evaluar la dependencia espacial de los hechos delictivos con respecto a las covariables espaciales se formularon diversos modelos estadísticos los cuales fueron estimados por el método de Máxima Verosimilitud. Para el caso de la dependencia espacial de una covariable a la vez, estas se describen en el Cuadro 9, mientras para el

caso múltiple en el Cuadro 10. Las especificaciones de modelos loglineales, para procesos puntuales espaciales Poisson, se formulan a través de la intensidad.

Para el caso del proceso Poisson homogéneo (CSR), el modelo tiene la siguiente expresión:

$$\log \rho(u, x) = \beta$$

donde β es la intensidad (número esperado de puntos por unidad de área) y u es una ubicación cualesquiera del espacio de estudio o ventana de observación (W). Así el valor de la intensidad estimada para nuestro caso de estudio es, $\hat{\rho}(u, x) = e^{1.880741} = 6.558363$ y representa el número de hechos delictivos por km^2 para la región de estudio. Por definición de este modelo, se asume que la intensidad es homogénea y por tanto no depende de la ubicación u .

Con respecto a los modelos (1) - (4) con dependencia de una covariable espacial, el modelo de proceso Poisson no homogéneo tiene la siguiente forma:

$$\rho(u, x) = e^{\beta_0 + \beta_1 Z_i}$$

donde Z_i , es la covariable espacial observada en u , β_0 y β_1 son los parámetros del modelo. Específicamente para el modelo (2), se tiene:

$$\rho(u, x) = e^{2.366107830 - 1.051617Z_1}$$

Cuadro 9: Coeficientes del modelo log - lineal univariado para el caso de un proceso espacial Poisson no homogéneo.

Modelo	Variabes	Estimate	S.E.	CI95.lo	CI95.hi	Ztest	Zval
Poisson Homogéneo (0)	(Intercept)	1.880741	0.030401	1.821157	1.940326	***	61.86467
Poisson No homogéneo (1)	(Intercept)	1.880806	0.030628	1.820776	1.940837	***	61.40768
	$Z_1 (<0.11)$	-0.001073	0.251869	-0.49473	0.492582		-0.00426
Poisson No homogéneo (2)	(Intercept)	2.366108	0.043981	2.279907	2.452309	***	53.79854
	Z_2	-1.051617	0.085483	-1.219161	-0.884073	***	-12.30203
Poisson No homogéneo (3)	(Intercept)	1.981458	0.044368	1.894498	2.068417	***	44.65979
	$Z_3 (>60)$	-0.182021	0.060915	-0.30141	-0.06263	**	-2.98810
Poisson No homogéneo (4)	(Intercept)	1.423270	0.064411	1.297026	1.549514	***	22.09657
	Z_4	0.000038	0.000004	0.000029	0.000047	***	8.65450

Fuente: Elaboración propia.

Respecto a la significancia de los coeficientes de los modelos, en el Cuadro 9, estos resultaron altamente significativos para cada una de las covariables (a excepción de la distancia hacia un centro de seguridad), lo cual indica que la intensidad de hechos delictivos, dependen de estas covariables. Con respecto a los signos de las covariables espaciales que influyen significativamente al fenómeno de estudio, se concluye que cuanto más alejado este un punto de los límites distritales menor la intensidad de hechos delictivos. Es decir, los hechos delictivos ocurren en zonas cercanas a los límites distritales. Esto presumimos ocurre porque las comisarías de los distritos velan solo por la seguridad de sus ciudadanos, la cual resulta beneficioso para los delincuentes al lograr evadirse de los arrestos.

Para el caso de la dependencia espacial múltiple en un proceso Poisson no homogéneo, se formularon cuatro modelos que van de (5) – (8), y se muestran en el Cuadro 10.

Cuadro 10: Coeficientes del modelo log - lineal múltiple para el caso de un proceso espacial Poisson no homogéneo.

Modelo	Variables	Estimate	S.E.	CI95.lo	CI95.hi	Ztest	Zval
Poisson No homogéneo (5)	(Intercept)	2.024665	0.091209	1.845898	2.203431	***	22.19806
	Z ₁ (<0.11)	-0.092417	0.252170	-5.87E-01	4.02E-01		-0.36649
	Z ₂	-1.004802	0.087974	-1.177227	-0.832376	***	-11.4216
	Z ₃ (>60)	-0.011861	0.063282	-1.36E-01	1.12E-01		-0.18743
	Z ₄	0.000027	0.000005	0.000018	0.000036	***	5.672683
Poisson No homogéneo (6)	(Intercept)	2.024694	0.091203	1.845941	2.203448	***	22.19998
	Z ₂	-1.004844	0.087987	-1.177295	-0.832393	***	-11.4204
	Z ₃ (>60)	-0.012677	0.063244	-1.37E-01	1.11E-01		-0.20045
	Z ₄	0.000027	0.000005	0.000018	0.000036	***	5.662029
Poisson No homogéneo (7)	(Intercept)	2.419135	0.053938	2.313418	2.524852	***	44.85006
	Z ₂	-1.046305	0.085779	-1.214428	-0.878181	***	-12.1977
	Z ₃ (>60)	-0.101282	0.060959	-0.22076	0.018195		-1.66148
Poisson No homogéneo (8)	(Intercept)	2.014646	0.076305	1.865091	2.164201	***	26.40252
	Z ₂	-1.004815	0.087978	-1.177248	-0.832381	***	-11.4212
	Z ₄	0.000027	0.000005	0.000018	0.000036	***	5.929459

Fuente: Elaboración propia.

Los coeficientes de los modelos resultaron ser, de forma individual, altamente significativos para el caso del modelo (8), en los otros casos al menos un coeficiente fue altamente significativo. Esta serie de modelos se plantearon con el fin de estimar el mejor modelo que se ajuste a los datos del patrón puntual.

Por último para el caso del modelo (8), se estimó un modelo clúster de Neyman – Scott, descrito en el Cuadro 11, donde la forma de la intensidad para este modelo es la misma que del modelo (8). La diferencia la hacen los parámetros del clúster, “kappa” y “scale”, estimadas a partir de la función – K paramétrica y a través del método de *Mínimo Contraste*.

Cuadro 11: Coeficientes del modelo log – lineal, para el caso de un proceso espacial clúster Neyman - Scott (no homogéneo).

Modelo	Variables	Estimate	S.E.	CI95.lo	CI95.hi	Ztest	Zval
Modelo clúster	(Intercept)	2.014646	0.233457	1.557080	2.472213	***	8.629639
	Z_2	-1.004815	0.205377	-1.407347	-0.602283	***	-4.892532
	Z_4	0.000027	0.000015	-0.000003	0.000057		1.753346
	Kappa	0.399605					
	Scale	0.203248					

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 15, muestra la función – K , estimada usando la intensidad paramétrica del modelo (8) y en color rojo y verde las funciones teóricas.

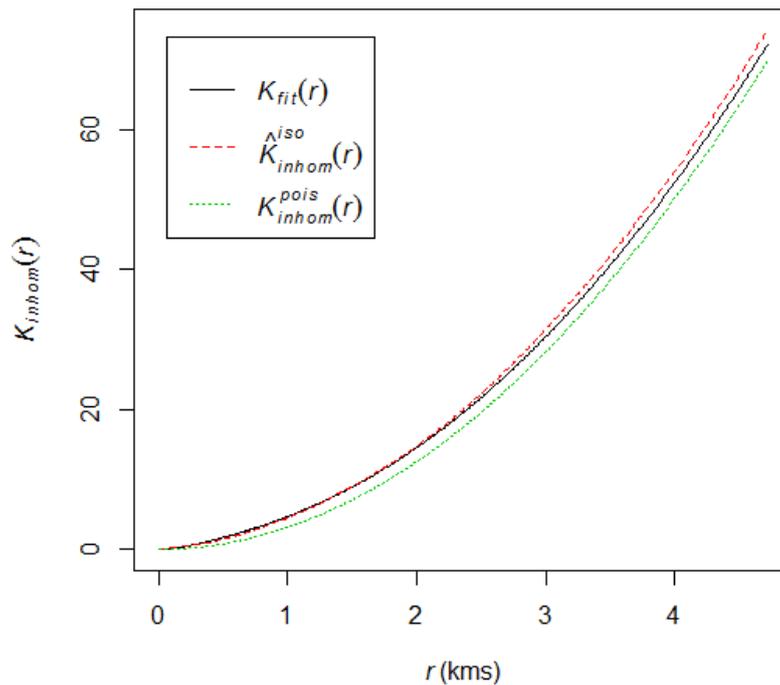


Fig. 15: Función - K no homogénea

Los valores del modelo clúster ajustado y los valores predichos de la intensidad se muestran en la Figura 16, donde se muestra que los puntos están en su mayoría en los lugares con mayor intensidad, lo cual indica que el modelo (8) se ajusta al comportamiento de los datos.

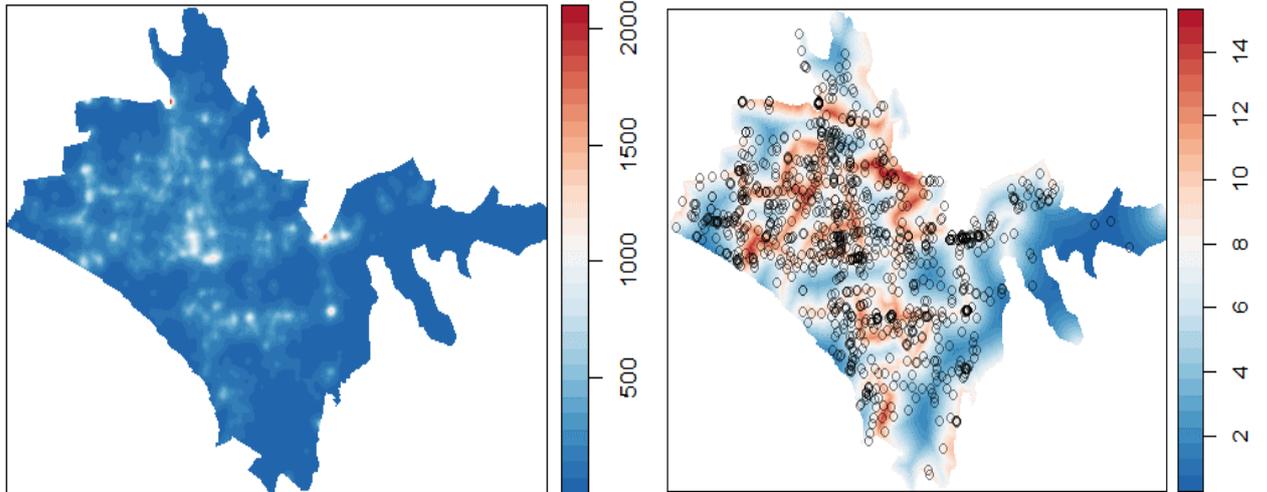


Fig. 16: Clúster ajustado (lado izquierdo) e intensidad predicha (lado derecho).

4.3 SELECCIÓN DEL MODELO

La selección de los diversos modelos estimados, se realizó con la prueba de razón de verosimilitud, a través de comparaciones entre pares de modelo. Los resultados se muestran en el Cuadro 12.

Cuadro 12: Pruebas de razón de verosimilitud.

Comparación de modelos	Df	Deviance	Pr(>Chi)	
(6) vs (5)	1	0.13840	0.70990	
(7) vs (6)	1	31.99900	0.00000	***
(8) vs (6)	1	0.04017	0.84120	
(0) vs (8)	2	238.85000	0.00000	***
(1) vs (8)	1	238.85000	0.00000	***
(2) vs (8)	1	34.71200	0.00000	***
(3) vs (8)	1	229.96000	0.00000	***
(4) vs (8)	1	165.42000	0.00000	***

0 '***' 0.001 '***' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Fuente: Elaboración propia.

El mejor modelo se eligió tomando en cuenta aquel que tenía una menor cantidad de parámetros y no presente una alta diferencia significativa con respecto a uno más complejo. De esta forma el modelo (8), fue el que mejor se ajustó a los datos y representa al modelo de proceso puntual espacial Poisson no homogéneo, de la siguiente forma:

$$\hat{\rho}(u) = e^{2.014646 - 1.004815Z_2 + 0.000027Z_4}$$

donde Z_2 y Z_4 representan: la distancia (km) a un límite distrital y la densidad poblacional (población/km²), respectivamente.

4.4 DIAGNÓSTICO DE RESIDUALES

Finalmente los gráficos de diagnóstico para los residuales raw, del modelo ajustado (8), se muestran en la Figura (17). En la parte superior izquierda se muestra un gráfico de marcas, al lado inferior – derecha se muestra un campo de residuales suavizados a través de una función Kernel, los otros dos gráficos representan las variables no incluidas en el modelo tanto para la coordenada de longitud y latitud. Con respecto a las coordenadas de ubicación: longitud (*x coordinate*) y latitud (*y coordinate*) no incluidas en el modelo, los residuales se encuentran alrededor de cero en la coordenada de longitud, de igual forma aunque en menor grado sucede para el coordenada de latitud, lo cual indica que los residuales raw tienen un buen comportamiento y no son necesarias incluirlas como una covariable más en el modelo elegido. En la diagonal principal, se observa un gráfico de marcas de los residuales en los puntos observados, de tamaños similares y pequeños lo cual es un buen indicador de que no existen zonas en las cuales los residuales son demasiado grandes. Finalmente se observa un campo de residuales suavizado por el método kernel.

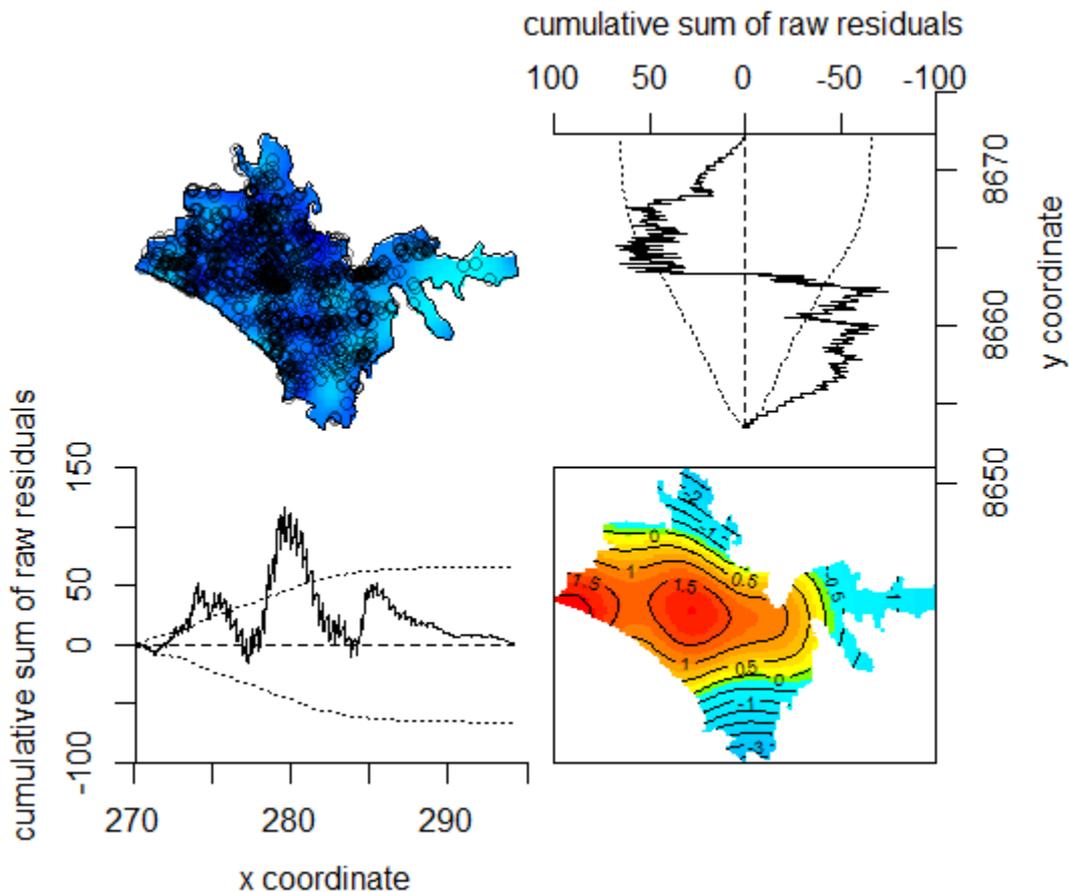


Fig. 17: Gráfico de diagnóstico de residuales (raw).

V. CONCLUSIONES

De acuerdo a las pruebas de CSR, se determinó que el patrón puntual de hechos delictivos, se ajusta de mejor forma a un modelo de proceso puntual espacial Poisson no homogéneo. Así, el modelo elegido teniendo en cuenta la prueba de razón de verosimilitud fue el modelo log-lineal, que incluye como covariables espaciales a: la distancia al límite distrital y la densidad poblacional.

A través de los gráficos de las estadísticas de resumen, las pruebas basadas en cuadrantes en contra de CSR y el modelo elegido, se concluye que los hechos delictivos se encuentran distribuidos de forma no homogénea a lo largo de la ciudad de Lima Centro y Residencial, en la que existen zonas con mayor incidencia de hechos delictivos, tales como los distritos de Lima Cercado y Lince. Particularmente también se identificaron puntos específicos de la ciudad de Lima donde la incidencia de hechos delictivos es muy alta tales como lo ocurrido en la Av. Arequipa hasta llegar al cruce con la Av. Juan de Zela, cuya intensidad fluctúa en el rango de 25 a 30 hechos delictivos / km², aproximadamente. Otra zona corresponde a la zona conocida como el Trebol de Javier Prado con intensidades similares al primer caso.

A partir de los modelos Poisson univariado, se concluyó que en los lugares con mayor densidad poblacional, existe mayor ocurrencia de hechos delictivos. Un ejemplo concreto de esto fue el Trebol de Javier Prado.

Una mayor inversión en orden interno efectuado por los Municipios, favorece a la reducción de la delincuencia. Esto involucra directamente a las autoridades locales en la forma como estos destinan el presupuesto para el control interno y seguridad ciudadana. Sin embargo, cabe notar también aquí, que gran parte de los recursos con los que cuentan los municipios provienen de los impuestos que pagan sus propios ciudadanos, con lo cual la responsabilidad recae también en ellos.

Los límites jurisdiccionales (distritales) favorecen al incremento de los hechos delictivos. Esto corrobora muchas afirmaciones periodísticas que muestran como las barreras

jurisdiccionales existen y resultan beneficiosos para los delincuentes en el momento de evasión y perjudican a las víctimas al momento de reportar el hecho delictivo y su denuncia, dado que deben realizarla en una comisaria de su jurisdicción.

No se encontró evidencia estadística, para afirmar que la distribución espacial de las comisarías y serenazgos, tiene efecto reductor en los hechos delictivos.

En general, las ocurrencias de hechos delictivos no solo obedecen a un factor sino a una conjunto de estos (considerándose también aquellos que no fueron incluidos en el modelo) y que involucran la participación de diversos sectores desde los distintos niveles de gobiernos tanto locales, nacional y de los ciudadanos en general.

Desde un punto de vista metodológico, el análisis estadístico de patrones puntuales espaciales se constituye en una herramienta valiosa para combatir la delincuencia, ya que no solo permite identificar los lugares donde estos ocurren, sino también porque detecta las zonas de mayor incidencia delictivas a través de la intensidad y usa las covariables espaciales relacionadas a este problema a través de los modelos estadísticos de procesos puntuales espaciales.

Finalmente cabe recalcar la gran utilidad de los Sistemas de Información Geográfica, que existen hoy en día y que fueron utilizados no solo para proporcionar datos sino también para la identificación visual y real de los lugares donde ocurren la mayor incidencia de hechos delictivos. Un ejemplo de esto fue Google Maps a través de las imágenes satélites.

VI. RECOMENDACIONES

1. Se recomienda a las autoridades responsables de velar por la seguridad ciudadana, así como a las personas involucradas en la formulación de políticas referidas a estos temas, tomar conciencia que este tema involucra una suma de diversos factores y que solo acciones ejecutadas de manera conjunta (sin barreras jurisdiccionales) podrán ayudar a la reducción del número de hechos delictivos.
2. Dado que se identificaron que las zonas de mayor afluencia pública son sitios con mayores ocurrencias de hechos delictivos, se recomienda a las autoridades considerar a estas zonas como lugares de priorización para combatir la delincuencia.
3. Algunas covariables espaciales, tales como el nivel socioeconómico de los ciudadanos del lugar, fueron obviadas en la presente tesis, por lo que para futuras investigaciones se recomienda incluirlas en el modelo.
4. Para los trabajos sucesivos, se recomienda comparar los resultados obtenidos en este estudio con el enfoque del modelamiento estadístico a partir de estadísticas de resumen tales como la función $-K$.
5. Algunas covariables espaciales pueden estar disponibles solo en los lugares donde ocurrió el evento de interés, ante esto se sugiere para lo posterior utilizar los modelos estadísticos de procesos puntuales marcados. Modelos más complicados surgen cuando dos eventos de interés se registran en un mismo lugar, por ejemplo cuando una vivienda fue asaltada más de una vez. En estos casos se recomienda usar la teoría correspondiente a estos procesos, los cuales no fueron desarrolladas aquí.
6. Finalmente, se recomienda a cada una de las municipalidades y/o gobiernos locales del país a registrar o seguir registrando de forma georreferenciada, los hechos delictivos ocurridos en su jurisdicción no solo con el fin de realizar los mapas de delitos, sino también como una oportunidad para efectuar análisis más avanzados que ayuden a la reducción de los hechos delictivos.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adler, R. 1981. *The Geometry of Random Fields*. Wiley. New York.
- Baddeley, A. J; Silverman, B. W. 1984. A cautionary example on the use of second-order methods for analyzing point patterns. *Biometrics*, 40, 1089–1093.
- Baddeley, A. J; Gill, R. D. 1997. Kaplan-Meier estimators of distance distributions for spatial point processes, *Annals of Statistics* 25: 263–292.
- Baddeley, A. J; Moller, J; Waagepetersen, R. 2000. Non-an semi-parametric estimation of interaction in inhomogeneous point patterns. *Statistica Neerlandica* (2000) Vol (54), nr 3. Pp.329-350.
- Baddeley, A. J; Turner, R. 2000. Practical maximum pseudolikelihood for spatial point patterns (with discussion). *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 42(3):283–322
- Baddeley, A; Turner, R; Moller J; Hazelton, M. 2005. Score, Pseudo-Score and Residual Diagnostics for Spatial Point Process Models.
- Baddeley, A; Moller, J; Pakes, A. G. 2007. Properties of residuals for Spatial point processes. *Ann Inst Stat Math* (2008) 60:627–649.
- Baddeley, A. 2008. *Analysing spatial point patterns in R*, CSIRO and University of Western Australia.
- Baddeley, A; Rubak, E; Moller, J. 2011. Score, Pseudo-Score and Residual Diagnostics for Spatial Point Process Models.
- Baddeley, A; Rubak, E; Turner, R. 2016. *Spatial Point Patterns Methodology and Applications with R*. CRC Press Chapman & Hall CRC BOOK.
- Barndorff-Nielsen, O. E. 1978. *Information and Exponential Families in Statistical Theory*. Wiley, Chichester, New York, Brisbane, Toronto.

- Bedford, T; Berg, J. V. D. 1997. A remark on van Lieshout and Baddeley's J-function for point processes, *Advances in Applied Probability* 29: 19–25.
- Benes, V; Bodlak, K., Moller, J; Waagepetersen, R. P. 2002. Bayesian analysis of log Gaussian Cox process models for disease mapping, Technical Report R-02-2001, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University. Submitted.
- Berman, M; Turner, R. 1992. *Approximating Point Process Likelihoods with GLIM*. Wiley for the Royal Statistical Society.
- Billingsley, P. 1995. *Probability and Measure*. 3rd Edition. Wiley, New York.
- Bivand, R. S; Pebesma, E; Gómez, R. V. 2013. *Applied Spatial Data Analysis with R*, 2 edn, Springer.
- Cox, D. R. 1955. Some statistical models related with series of events, *Journal of the Royal Statistical Society Series B* 17: 129–164.
- Cox, D. R. 1972. The statistical analysis of dependencies in point processes. In P.A.W. Lewis, editor, *Stochastic Point Processes*, pages 55–66. Wiley, New York.
- Cox, D. R; Isham, V. 1980. *Point Processes*. Chapman & Hall. London.
- Cressie, N. A. C. 1991. *Statistics for Spatial Data*, 1 edn, John Wiley & Sons.
- Daley, D. J. y Vere -Jones, D. 2008. *An Introduction to the Theory of Point Processes*, 2 edn, Vol. 2, Springer.
- Diggle, P. J. 2003. *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*. Oxford University Press, 2nd edition.
- Diggle, P. J. 2014. *Statistical Analysis of Spatial and Spatio-Temporal Point Patterns*, 2 edn. CRC Press A Chapman and Hall, Boca Raton.
- Hardle, W; Muller, M; Sperlich, S; Werwatz, A. 2004. *Nonparametric and Semiparametric Models*. Springer.
- Heikkinen, J; Arjas, E. 1998. Non-parametric Bayesian estimation of a spatial Poisson intensity, *Scandinavian Journal of Statistics* 25: 435–450.

- Illian, J; Penttinen, A; Stoyan, H; Stoyan, D. 2008. *Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns*. John Wiley & Sons, Ltd.
- Kingman, J. F. C. 1993. *Poisson Processes*. Clarendon Press. Oxford.
- Kutoyants, Y. A. 1998. *Statistical Inference for Spatial Poisson Processes*. Number 134 in *Lecture Notes in Statistics*. Springer, New York.
- Lawson, A. B; Denison, D. G. T. 2002. *Spatial Cluster Modelling*. Chapman & Hall CRC.
- Lehmann, E. L. 1983. *Theory of Point Estimation*. John Wiley and Sons, New York.
- Lieshout, M. N. M; Baddeley, A. J. 1996. A nonparametric measure of spatial interaction in point patterns, *Statistica Neerlandica* 50, 344-361.
- Lloyd, C. 2007. *Local Models for Spatial Analysis*, 1 edn, CRC Press.
- MLM (Municipalidad de Lima Metropolitana, PE). 2016. *Plan Regional de Seguridad Ciudadana de Lima Metropolitana 2016*. GSGC Gerencia de Seguridad Ciudadana.
- Moller, J; Waagepetersen, R. P. 2004. *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*, 1 edn, Chapman & Hall CRC.
- Moller, J; Waagepetersen, R. 2007. *Modern Statistic for Spatial Point Processes*. Board of the Foundation of the Scandinavian Journal of Statistics 2007. Published by Blackwell.
- Neyman, J; Scott, E. L. 1958. Statistical approach to problems of cosmology, *Journal of the Royal Statistical Society Series B* 20: 1-43.
- Nguyen, X. X; Zessin, H. 1976. Punktprozesse mit Wechselwirkung. *Z. Wahrsch. Verw. Gebite* 37, 91-126.
- Rathbun, S. L; Cressie, N. 1994. Asymptotic properties of estimators of the parameters of spatial inhomogeneous Poisson point processes. *Advances in Applied Probability*, 26:122-154.
- Ripley, B. D. 1976. The second-order analysis of stationary point processes, *Journal of Applied Probability* 13: 255-266.

Schabenberger, O; Gotway, C. 2005. *Statistical Methods for Spatial Data Analysis*, 1 edn, Chapman & Hall CRC. Boca Raton London New York Washington, D.C.

Silverman, B. W. 1986. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, 1 edn, Chapman & Hall CRC.

Stoyan, D; Stoyan, H. 1994. *Fractals, Random Shapes and Point Fields*, Wiley, Chichester.

Stoyan, D; Kendall, W. S; Mecke, J. 1995. *Stochastic Geometry and Its Applications*, second edn, Wiley, Chichester.

Stoyan, D; Stoyan, H. 2000. Improving ratio estimators of second order point process characteristics, *Scandinavian Journal of Statistics* 27, 641-656.

Waagepetersen, R. P. 2007. An Estimating Function Approach to Inference for Inhomogeneous Neyman-Scott Processes. *Biometrics*, 63(1), 252-258.

VIII. ANEXOS

ANEXO 1: Ubicación de los hechos delictivos

N°	Lon	Lat	N°	Lon	Lat	N°	Lon	Lat	N°	Lon	Lat	N°	Lon	Lat
1	-77.05279	-12.06277	66	-77.02933	-12.12338	131	-77.02276	-12.08802	196	-77.05630	-12.06849	261	-77.03739	-12.06420
2	-76.94159	-12.07114	67	-77.02743	-12.11807	132	-77.01873	-12.08840	197	-77.02314	-12.04350	262	-77.03666	-12.07064
3	-77.03095	-12.07600	68	-77.02452	-12.13246	133	-77.07329	-12.05856	198	-77.00903	-12.10346	263	-77.03596	-12.04600
4	-77.00835	-12.08482	69	-77.01271	-12.12705	134	-77.07018	-12.04920	199	-77.00498	-12.08855	264	-77.03444	-12.07322
5	-77.04098	-12.05695	70	-77.01124	-12.11810	135	-77.06843	-12.05744	200	-77.00413	-12.08343	265	-77.03403	-12.07314
6	-77.03234	-12.07489	71	-77.06763	-12.06754	136	-77.04270	-12.04621	201	-76.99747	-12.10975	266	-77.03368	-12.05140
7	-77.04141	-12.08669	72	-77.06761	-12.06801	137	-77.04268	-12.04661	202	-76.99648	-12.08884	267	-77.01933	-12.05113
8	-77.06097	-12.09171	73	-77.06672	-12.07368	138	-77.03321	-12.04175	203	-77.05123	-12.10290	268	-77.01663	-12.05045
9	-77.04905	-12.11400	74	-77.06438	-12.07211	139	-77.02888	-12.05176	204	-77.04508	-12.09227	269	-77.03577	-12.08375
10	-77.03580	-12.11763	75	-77.06062	-12.07230	140	-77.04322	-12.09038	205	-77.02594	-12.09609	270	-77.03400	-12.08833
11	-77.06586	-12.07215	76	-77.06011	-12.07394	141	-77.03835	-12.12406	206	-77.01917	-12.09024	271	-77.03264	-12.08322
12	-77.02311	-12.04313	77	-77.03449	-12.02380	142	-77.03562	-12.10857	207	-77.00707	-12.07910	272	-77.02844	-12.08146
13	-77.00191	-12.10076	78	-77.00490	-12.11132	143	-77.03185	-12.10886	208	-76.98971	-12.07830	273	-77.02829	-12.08270
14	-76.98975	-12.11053	79	-77.00361	-12.09092	144	-77.03131	-12.11133	209	-76.98487	-12.08335	274	-77.03698	-12.11457
15	-76.98187	-12.08887	80	-76.99762	-12.09941	145	-77.07045	-12.06775	210	-77.04351	-12.03649	275	-77.03484	-12.12616
16	-76.98086	-12.09639	81	-76.99581	-12.09383	146	-77.06771	-12.08333	211	-77.08260	-12.07772	276	-77.03476	-12.10742
17	-76.97930	-12.10123	82	-76.99485	-12.10070	147	-77.03812	-12.02812	212	-77.07808	-12.07024	277	-77.03251	-12.10956
18	-77.05631	-12.09763	83	-76.99470	-12.08456	148	-77.02961	-12.04286	213	-77.01539	-12.15292	278	-77.03105	-12.12193
19	-77.08672	-12.07821	84	-76.98509	-12.10629	149	-77.02894	-12.04089	214	-76.99329	-12.14302	279	-77.03032	-12.11127
20	-77.08508	-12.08929	85	-76.98485	-12.10758	150	-77.00364	-12.10974	215	-76.98424	-12.08503	280	-77.02648	-12.11464
21	-77.08177	-12.09004	86	-76.98294	-12.09710	151	-76.99929	-12.11145	216	-76.97825	-12.11107	281	-77.02564	-12.13082
22	-76.99229	-12.11318	87	-76.98119	-12.09668	152	-76.99667	-12.08751	217	-76.97112	-12.08366	282	-77.02369	-12.12163
23	-76.98028	-12.13412	88	-77.03890	-12.10423	153	-76.99000	-12.09655	218	-76.96314	-12.10430	283	-77.07716	-12.06979
24	-76.97948	-12.11086	89	-77.03647	-12.09264	154	-76.98579	-12.08514	219	-76.99489	-12.06441	284	-77.06777	-12.08398
25	-76.97510	-12.07868	90	-77.03524	-12.09849	155	-77.03279	-12.09707	220	-76.98819	-12.07301	285	-77.06670	-12.07462
26	-76.96154	-12.08480	91	-77.03322	-12.09444	156	-77.00455	-12.07332	221	-77.02370	-12.13915	286	-77.06558	-12.07929
27	-77.00439	-12.11735	92	-77.01174	-12.10218	157	-77.05111	-12.10795	222	-77.02241	-12.13726	287	-77.06214	-12.08082
28	-76.99559	-12.11214	93	-76.99352	-12.08062	158	-77.08658	-12.07571	223	-77.02162	-12.15360	288	-77.06188	-12.07350
29	-77.02561	-12.14333	94	-77.09946	-12.07647	159	-77.08343	-12.06449	224	-77.02050	-12.15036	289	-77.05979	-12.06726
30	-77.05436	-12.06681	95	-77.09122	-12.06899	160	-77.08329	-12.06460	225	-77.01634	-12.14816	290	-77.05906	-12.07198
31	-77.04747	-12.05917	96	-77.08922	-12.07523	161	-77.08016	-12.08018	226	-77.05883	-12.06223	291	-77.05430	-12.06655
32	-77.04601	-12.05868	97	-77.08509	-12.08167	162	-77.01530	-12.13236	227	-77.05226	-12.05710	292	-77.05407	-12.07222
33	-77.04441	-12.06223	98	-77.08186	-12.06914	163	-76.99617	-12.16694	228	-77.04854	-12.05665	293	-77.03945	-12.03450
34	-77.05610	-12.08429	99	-77.08159	-12.07614	164	-76.99127	-12.11990	229	-77.04701	-12.05871	294	-77.03767	-12.03210
35	-77.05058	-12.08244	100	-77.08080	-12.09266	165	-76.98196	-12.12984	230	-77.04520	-12.05645	295	-77.02961	-12.04288
36	-77.04397	-12.06991	101	-77.08069	-12.09168	166	-76.98018	-12.08458	231	-77.04427	-12.06234	296	-77.02958	-12.04227
37	-77.03941	-12.07242	102	-77.07995	-12.09308	167	-77.02126	-12.13226	232	-77.07746	-12.04973	297	-77.00158	-12.10295
38	-76.96835	-12.08066	103	-77.07971	-12.09115	168	-77.02110	-12.11424	233	-77.07488	-12.04650	298	-76.99712	-12.08453
39	-76.96724	-12.07744	104	-77.07871	-12.09390	169	-77.00305	-12.11731	234	-77.05893	-12.08789	299	-76.99654	-12.08687
40	-76.95744	-12.08329	105	-77.00297	-12.13727	170	-77.00187	-12.12059	235	-77.04745	-12.07100	300	-76.99624	-12.10682
41	-76.95114	-12.06981	106	-76.99444	-12.13799	171	-76.99274	-12.06461	236	-77.04413	-12.07432	301	-76.99566	-12.08847
42	-76.94552	-12.06212	107	-76.98908	-12.15907	172	-77.02599	-12.14342	237	-77.04229	-12.07509	302	-76.99416	-12.08138
43	-77.02305	-12.08146	108	-76.98757	-12.11474	173	-77.05706	-12.06261	238	-77.04016	-12.07494	303	-76.98551	-12.08542
44	-77.02192	-12.08532	109	-76.98203	-12.13199	174	-77.05368	-12.05642	239	-76.94933	-12.10154	304	-77.05800	-12.09356
45	-77.00781	-12.08187	110	-76.97962	-12.13391	175	-76.95725	-12.07106	240	-76.94176	-12.07110	305	-77.05408	-12.09429
46	-77.07971	-12.06020	111	-76.97925	-12.13122	176	-76.95667	-12.07083	241	-77.02877	-12.06756	306	-77.04681	-12.09436
47	-77.07595	-12.06749	112	-76.97594	-12.12435	177	-76.95472	-12.07317	242	-77.02806	-12.07267	307	-77.03885	-12.10831
48	-77.07507	-12.06272	113	-76.97507	-12.11959	178	-77.02779	-12.06355	243	-77.02628	-12.08224	308	-77.03039	-12.10311
49	-77.05938	-12.04874	114	-76.97404	-12.11293	179	-77.01933	-12.07627	244	-77.02524	-12.08228	309	-77.02626	-12.09116
50	-77.03688	-12.07574	115	-76.97383	-12.08058	180	-77.01691	-12.07422	245	-77.02404	-12.06961	310	-77.04391	-12.03225
51	-77.03592	-12.07562	116	-76.96969	-12.08444	181	-77.07727	-12.05993	246	-77.02275	-12.06784	311	-77.04345	-12.03684
52	-77.04410	-12.08375	117	-76.96860	-12.10379	182	-77.05948	-12.04818	247	-77.02259	-12.07028	312	-77.04339	-12.03647
53	-77.04104	-12.08158	118	-76.96303	-12.10280	183	-77.04248	-12.04951	248	-77.02232	-12.06937	313	-77.10743	-12.07978
54	-77.03904	-12.08985	119	-77.01903	-12.11087	184	-77.04223	-12.05080	249	-77.01426	-12.08334	314	-77.10446	-12.07079
55	-77.03755	-12.08046	120	-77.01179	-12.11171	185	-77.04188	-12.04682	250	-77.01407	-12.07169	315	-77.09852	-12.07173
56	-77.03753	-12.08393	121	-77.00879	-12.11782	186	-77.03877	-12.05022	251	-77.01262	-12.08579	316	-77.09792	-12.08346
57	-77.03441	-12.08880	122	-77.00583	-12.12210	187	-77.03845	-12.05407	252	-77.01164	-12.06225	317	-77.09345	-12.07719
58	-77.02984	-12.07947	123	-76.99851	-12.11987	188	-77.03585	-12.07569	253	-77.00804	-12.06929	318	-77.09218	-12.07367
59	-77.07354	-12.09189	124	-76.99679	-12.11223	189	-77.03417	-12.05177	254	-77.00443	-12.08423	319	-77.09215	-12.07358
60	-77.07313	-12.09092	125	-77.05817	-12.06437	190	-77.03317	-12.04871	255	-77.07950	-12.05864	320	-77.08957	-12.07777
61	-77.06845	-12.08927	126	-77.05775	-12.05652	191	-77.01485	-12.05688	256	-77.07808	-12.06439	321	-77.08903	-12.07777
62	-77.06151	-12.09327	127	-77.04720	-12.06740	192	-77.03714	-12.08593	257	-77.07712	-12.06230	322	-77.08442	-12.07797
63	-77.03703	-12.11053	128	-77.03321	-12.06633	193	-77.03139	-12.08421	258	-77.06731	-12.06761	323	-77.08399	-12.09062
64	-77.03510	-12.10793	129	-77.02920	-12.06498	194	-77.05838	-12.09485	259	-77.06330	-12.05910	324	-77.08208	-12.07835
65	-77.03295	-12.11661	130	-77.02706	-12.07420	195	-77.02970	-12.11192	260	-77.03852	-12.05194	325	-77.07913	-12.08221

N°	Lon	Lat												
326	-77.07792	-12.06895	409	-77.04148	-12.05957	492	-77.04384	-12.03627	575	-77.08910	-12.07818	658	-77.00511	-12.12180
327	-77.07792	-12.06882	410	-77.04085	-12.04426	493	-77.04177	-12.03105	576	-77.08556	-12.08920	659	-76.99925	-12.11464
328	-77.07578	-12.07973	411	-77.03949	-12.04650	494	-77.03760	-12.03453	577	-77.08528	-12.07830	660	-76.99493	-12.11153
329	-76.99403	-12.13943	412	-77.03942	-12.06014	495	-77.03703	-12.03137	578	-77.08441	-12.07627	661	-77.05844	-12.06563
330	-76.99163	-12.11495	413	-77.03872	-12.05102	496	-77.03435	-12.02810	579	-77.08436	-12.08303	662	-77.05805	-12.08403
331	-76.99042	-12.12390	414	-77.03737	-12.06470	497	-77.03246	-12.02771	580	-77.08377	-12.07773	663	-76.95509	-12.07397
332	-76.98960	-12.11243	415	-77.03736	-12.06470	498	-77.03169	-12.01882	581	-77.08336	-12.06491	664	-76.95323	-12.06472
333	-76.98212	-12.08523	416	-77.03677	-12.07684	499	-77.03096	-12.02727	582	-77.08165	-12.07755	665	-76.95103	-12.06597
334	-76.98151	-12.12820	417	-77.03646	-12.04709	500	-77.02849	-12.03172	583	-77.08108	-12.07624	666	-77.02870	-12.06823
335	-76.98102	-12.08731	418	-77.03645	-12.05039	501	-77.02582	-12.04317	584	-77.08019	-12.09172	667	-77.01740	-12.06616
336	-76.98092	-12.08473	419	-77.03643	-12.05697	502	-77.02262	-12.04105	585	-77.08038	-12.09182	668	-77.01488	-12.07319
337	-76.98015	-12.08469	420	-77.03631	-12.07567	503	-77.01771	-12.03991	586	-77.08036	-12.09187	669	-77.01171	-12.07219
338	-76.97981	-12.13054	421	-77.03569	-12.05840	504	-77.01586	-12.03761	587	-77.08020	-12.08874	670	-77.07952	-12.06019
339	-76.97946	-12.10282	422	-77.03556	-12.07755	505	-77.01498	-12.03779	588	-77.07924	-12.09250	671	-77.07942	-12.06015
340	-76.97926	-12.11327	423	-77.03552	-12.07682	506	-77.00869	-12.09195	589	-77.07902	-12.08510	672	-77.07797	-12.05434
341	-76.97913	-12.09860	424	-77.03536	-12.06021	507	-77.00806	-12.08447	590	-77.07718	-12.08098	673	-77.07668	-12.05479
342	-76.97827	-12.11029	425	-77.03529	-12.07840	508	-77.00781	-12.08843	591	-77.07707	-12.08366	674	-77.06584	-12.03547
343	-76.97667	-12.08369	426	-77.03451	-12.05196	509	-77.00661	-12.09424	592	-77.01540	-12.13784	675	-77.06399	-12.04925
344	-76.97504	-12.12716	427	-77.03417	-12.05207	510	-77.00366	-12.08856	593	-77.01147	-12.13663	676	-77.06309	-12.06106
345	-76.97389	-12.10433	428	-77.03251	-12.07408	511	-77.00288	-12.08832	594	-77.01109	-12.14747	677	-77.03901	-12.04872
346	-76.97044	-12.08785	429	-77.03225	-12.05326	512	-77.00117	-12.10064	595	-77.00447	-12.14544	678	-77.03842	-12.05421
347	-77.01132	-12.11467	430	-77.02997	-12.05775	513	-77.00053	-12.11063	596	-76.99300	-12.12829	679	-77.03786	-12.05097
348	-77.00212	-12.11391	431	-77.02980	-12.05891	514	-76.99743	-12.10700	597	-76.99197	-12.12823	680	-77.03661	-12.05662
349	-77.00199	-12.11768	432	-77.02330	-12.05805	515	-76.99676	-12.08754	598	-76.99106	-12.14917	681	-77.03489	-12.07441
350	-77.03672	-12.04739	433	-77.01691	-12.05724	516	-76.98588	-12.08510	599	-76.98570	-12.14825	682	-77.03421	-12.06367
351	-77.02367	-12.13879	434	-77.04250	-12.08685	517	-76.98554	-12.08542	600	-76.98447	-12.14033	683	-77.03400	-12.04986
352	-77.01970	-12.14151	435	-77.03987	-12.08825	518	-76.98464	-12.08515	601	-76.98353	-12.14949	684	-77.03167	-12.07279
353	-77.01952	-12.13080	436	-77.03899	-12.08930	519	-77.03809	-12.10697	602	-76.98310	-12.14954	685	-77.03073	-12.04950
354	-77.01881	-12.14422	437	-77.03753	-12.08399	520	-77.03693	-12.10385	603	-76.98250	-12.13131	686	-77.03862	-12.08978
355	-77.01789	-12.14108	438	-77.03595	-12.08213	521	-77.03623	-12.09899	604	-76.98236	-12.08514	687	-77.03474	-12.08314
356	-77.01596	-12.14358	439	-77.03585	-12.08376	522	-77.03489	-12.09082	605	-76.98203	-12.08518	688	-77.06979	-12.08668
357	-77.06617	-12.06759	440	-77.03582	-12.08376	523	-77.03414	-12.09796	606	-76.98203	-12.08538	689	-77.06319	-12.09991
358	-77.05766	-12.05558	441	-77.03576	-12.08374	524	-77.03235	-12.09155	607	-76.98056	-12.08369	690	-77.06042	-12.09263
359	-77.05759	-12.05578	442	-77.03506	-12.08859	525	-77.03180	-12.10353	608	-76.98042	-12.08343	691	-77.03423	-12.12586
360	-77.05518	-12.06053	443	-77.03501	-12.08862	526	-77.03173	-12.10349	609	-76.98041	-12.08461	692	-77.02894	-12.12448
361	-77.04989	-12.06987	444	-77.03494	-12.08526	527	-77.03038	-12.09207	610	-76.98033	-12.08439	693	-77.05210	-12.06990
362	-77.04969	-12.05770	445	-77.03488	-12.08355	528	-77.03008	-12.09207	611	-76.98016	-12.08463	694	-77.03762	-12.02968
363	-77.04839	-12.05675	446	-77.03487	-12.08358	529	-77.02940	-12.09197	612	-76.97993	-12.08456	695	-77.02963	-12.04296
364	-77.04831	-12.05854	447	-77.03464	-12.08468	530	-77.02938	-12.09208	613	-76.97925	-12.13265	696	-77.01002	-12.08724
365	-77.04537	-12.05884	448	-77.03461	-12.08418	531	-77.02827	-12.09148	614	-76.97891	-12.08484	697	-76.99355	-12.08954
366	-77.04405	-12.05351	449	-77.03449	-12.08571	532	-77.02819	-12.09167	615	-76.97883	-12.11036	698	-76.98596	-12.08517
367	-77.05118	-12.08262	450	-77.03438	-12.08567	533	-77.02718	-12.09118	616	-76.97863	-12.11017	699	-76.98574	-12.08504
368	-77.05013	-12.07557	451	-77.03426	-12.08636	534	-77.02709	-12.09160	617	-76.97851	-12.13108	700	-77.04796	-12.08960
369	-77.04725	-12.07084	452	-77.03417	-12.08709	535	-77.02708	-12.09126	618	-76.97850	-12.08473	701	-76.99545	-12.06957
370	-77.04064	-12.06472	453	-77.03403	-12.08818	536	-77.02705	-12.09165	619	-76.97837	-12.11033	702	-77.09287	-12.07747
371	-77.04017	-12.07177	454	-77.03385	-12.08945	537	-77.02693	-12.09165	620	-76.97836	-12.11031	703	-77.07811	-12.07044
372	-76.97248	-12.08353	455	-77.03344	-12.08351	538	-77.02681	-12.09324	621	-76.97828	-12.11048	704	-77.07794	-12.06761
373	-76.96812	-12.08206	456	-77.03184	-12.08772	539	-77.02614	-12.09116	622	-76.97825	-12.11013	705	-77.00534	-12.12809
374	-76.96688	-12.08044	457	-77.02781	-12.08367	540	-77.02594	-12.09087	623	-76.97824	-12.13108	706	-76.97895	-12.13118
375	-76.96622	-12.07929	458	-77.02757	-12.08260	541	-77.02591	-12.09115	624	-76.97817	-12.11002	707	-76.97736	-12.10258
376	-76.95722	-12.07067	459	-77.02699	-12.08240	542	-77.02563	-12.09545	625	-76.97815	-12.08475	708	-76.97337	-12.08949
377	-76.95689	-12.07134	460	-77.02589	-12.09110	543	-77.02523	-12.09471	626	-76.97811	-12.11028	709	-76.96771	-12.08624
378	-76.95567	-12.07437	461	-77.07489	-12.09097	544	-77.02463	-12.09122	627	-76.97807	-12.11037	710	-77.02111	-12.11426
379	-76.94912	-12.09219	462	-77.07332	-12.09121	545	-77.02457	-12.09083	628	-76.97805	-12.11027	711	-77.00712	-12.11479
380	-76.94561	-12.07279	463	-77.05159	-12.11037	546	-77.02436	-12.09123	629	-76.97794	-12.11011	712	-77.00267	-12.11764
381	-77.03043	-12.06619	464	-77.03329	-12.11485	547	-77.02420	-12.09762	630	-76.97737	-12.08634	713	-77.00295	-12.11463
382	-77.03019	-12.06276	465	-77.03093	-12.13094	548	-77.02159	-12.09384	631	-76.97665	-12.08414	714	-77.00433	-12.08421
383	-77.02987	-12.06389	466	-77.03045	-12.12146	549	-76.98339	-12.14967	632	-76.97636	-12.08639	715	-77.04521	-12.04332
384	-77.02582	-12.07586	467	-77.03025	-12.12193	550	-77.00552	-12.06715	633	-76.97586	-12.08640	716	-77.06371	-12.08258
385	-77.02317	-12.05904	468	-77.03012	-12.11414	551	-76.99917	-12.07858	634	-76.97562	-12.08432	717	-77.03149	-12.10336
386	-77.01788	-12.08354	469	-77.03009	-12.13155	552	-76.99750	-12.08103	635	-76.97343	-12.08373	718	-77.03023	-12.13138
387	-77.01731	-12.08210	470	-77.02988	-12.12946	553	-76.99723	-12.06460	636	-76.97337	-12.08405	719	-77.08046	-12.07821
388	-77.01649	-12.08233	471	-77.02978	-12.11203	554	-76.99373	-12.08087	637	-76.97335	-12.08387	720	-77.02234	-12.13789
389	-77.01471	-12.07384	472	-77.02967	-12.12772	555	-76.98940	-12.07769	638	-76.97325	-12.08403	721	-77.06458	-12.05301
390	-77.01366	-12.06376	473	-77.02939	-12.12694	556	-76.98583	-12.08504	639	-76.97265	-12.08397	722	-77.05741	-12.05589
391	-77.01340	-12.06564	474	-77.02913	-12.11921	557	-77.07802	-12.03550	640	-76.97247	-12.08394	723	-77.05119	-12.06733
392	-77.01336	-12.06482	475	-77.07930	-12.07482	558	-77.07800	-12.03607	641	-76.97219	-12.08396	724	-77.04337	-12.04301
393	-77.01139	-12.07137	476	-77.07779	-12.06832	559	-77.07787	-12.03577	642	-76.97083	-12.10533	725	-77.04805	-12.06850
394	-77.00768	-12.06918	477	-77.07625	-12.07051	560	-77.07757	-12.03567	643	-76.97050	-12.08366	726	-76.94160	-12.07189
395	-77.00760	-12.06668	478	-77.07133	-12.08151	561	-77.06595	-12.03570	644	-77.02563	-12.10818	727	-76.93867	-12.0

N°	Lon	Lat	N°	Lon	Lat	N°	Lon	Lat	N°	Lon	Lat	N°	Lon	Lat
741	-77.03726	-12.04642	810	-77.05167	-12.09020	879	-77.07369	-12.05327	948	-77.01239	-12.14430	1017	-77.05805	-12.08408
742	-77.03005	-12.05663	811	-77.05090	-12.09443	880	-77.04294	-12.04339	949	-77.00286	-12.13274	1018	-77.05589	-12.07796
743	-77.03000	-12.05720	812	-77.04310	-12.11072	881	-77.04247	-12.04849	950	-76.98525	-12.13227	1019	-77.05573	-12.08373
744	-77.02635	-12.04740	813	-77.04220	-12.09183	882	-77.03819	-12.04732	951	-76.98011	-12.08500	1020	-76.97327	-12.08278
745	-77.02554	-12.04675	814	-77.03457	-12.09797	883	-77.03719	-12.06320	952	-76.97890	-12.11017	1021	-76.96770	-12.07803
746	-77.02975	-12.12894	815	-77.02942	-12.09142	884	-77.03671	-12.05621	953	-76.97764	-12.08665	1022	-76.95791	-12.07026
747	-77.03999	-12.02646	816	-77.02742	-12.10274	885	-77.03658	-12.07097	954	-76.97721	-12.08656	1023	-76.95314	-12.07367
748	-77.00413	-12.09006	817	-77.02474	-12.09218	886	-77.03498	-12.04714	955	-76.97678	-12.08457	1024	-76.95018	-12.06761
749	-77.00356	-12.08676	818	-77.01365	-12.09858	887	-77.03126	-12.05895	956	-76.97625	-12.08635	1025	-76.94756	-12.07355
750	-77.03693	-12.09299	819	-76.98327	-12.14974	888	-77.03030	-12.05466	957	-76.96208	-12.10295	1026	-76.94545	-12.06940
751	-77.02919	-12.09184	820	-76.99459	-12.08106	889	-77.03010	-12.05789	958	-77.02704	-12.10295	1027	-76.94433	-12.07068
752	-77.09896	-12.07178	821	-76.98486	-12.08342	890	-77.02996	-12.05878	959	-77.02611	-12.10836	1028	-76.94200	-12.06920
753	-77.01032	-12.13369	822	-77.06596	-12.03552	891	-77.01569	-12.05508	960	-77.02600	-12.10834	1029	-76.94015	-12.06589
754	-76.99833	-12.13773	823	-77.09892	-12.07382	892	-77.01553	-12.05711	961	-77.02286	-12.10716	1030	-76.92100	-12.08040
755	-76.97913	-12.13086	824	-77.09474	-12.08038	893	-77.01525	-12.05286	962	-77.01860	-12.11265	1031	-76.91400	-12.07929
756	-77.01830	-12.11321	825	-77.09387	-12.07703	894	-77.01483	-12.05687	963	-77.01849	-12.11292	1032	-76.90574	-12.08824
757	-77.03698	-12.05617	826	-77.09198	-12.07797	895	-77.01056	-12.05732	964	-77.01835	-12.11291	1033	-77.01986	-12.08302
758	-76.94595	-12.06901	827	-77.08925	-12.07830	896	-77.04431	-12.09101	965	-77.01583	-12.11848	1034	-77.01883	-12.08566
759	-77.02241	-12.13720	828	-77.08602	-12.06138	897	-77.04273	-12.08660	966	-77.01363	-12.11695	1035	-77.00697	-12.07323
760	-77.05613	-12.06473	829	-77.08488	-12.07868	898	-77.03912	-12.08968	967	-77.01209	-12.11244	1036	-77.01727	-12.06611
761	-77.04663	-12.06320	830	-77.07769	-12.08145	899	-77.02661	-12.08879	968	-77.01198	-12.11266	1037	-77.04437	-12.06384
762	-77.04564	-12.06442	831	-77.00681	-12.13652	900	-77.02623	-12.08897	969	-77.01183	-12.11187	1038	-77.03222	-12.07555
763	-77.04504	-12.07502	832	-77.00045	-12.12857	901	-77.05531	-12.09199	970	-77.01179	-12.11284	1039	-77.04299	-12.08621
764	-77.04449	-12.07971	833	-76.99308	-12.12833	902	-77.03845	-12.11201	971	-77.00410	-12.11215	1040	-77.03316	-12.08555
765	-76.95839	-12.06758	834	-76.99231	-12.11669	903	-77.03748	-12.10949	972	-77.01919	-12.13795	1041	-77.03019	-12.08476
766	-76.94486	-12.07267	835	-76.98096	-12.08527	904	-77.03197	-12.10938	973	-77.04039	-12.04056	1042	-77.02727	-12.08811
767	-77.03214	-12.06768	836	-76.98059	-12.08424	905	-77.03070	-12.13127	974	-77.03683	-12.11887	1043	-77.02380	-12.09004
768	-77.03003	-12.07043	837	-76.98001	-12.08456	906	-77.03061	-12.11902	975	-77.06046	-12.07801	1044	-77.07264	-12.09441
769	-77.02837	-12.05908	838	-76.97844	-12.13112	907	-77.02977	-12.12923	976	-77.05401	-12.07296	1045	-77.07258	-12.09282
770	-77.02340	-12.06104	839	-76.97842	-12.08482	908	-77.02948	-12.11220	977	-77.00187	-12.10082	1046	-77.03592	-12.12569
771	-77.02162	-12.08131	840	-76.97802	-12.08427	909	-77.02823	-12.12747	978	-77.08799	-12.08812	1047	-77.02696	-12.12495
772	-77.01849	-12.05779	841	-76.97726	-12.12973	910	-77.06735	-12.08295	979	-76.99848	-12.11913	1048	-77.02594	-12.11891
773	-77.01636	-12.07311	842	-76.97638	-12.10937	911	-77.06727	-12.08319	980	-77.02256	-12.15605	1049	-77.07623	-12.07047
774	-77.01492	-12.08563	843	-76.97417	-12.12431	912	-77.06441	-12.08455	981	-77.04601	-12.05662	1050	-77.03118	-12.02281
775	-77.01458	-12.08928	844	-76.96800	-12.10708	913	-77.06323	-12.08625	982	-77.04252	-12.05296	1051	-77.01126	-12.09867
776	-77.00775	-12.08258	845	-77.02410	-12.10780	914	-77.04399	-12.03669	983	-77.04254	-12.08028	1052	-77.00703	-12.09715
777	-77.07770	-12.06406	846	-77.02404	-12.11446	915	-77.04397	-12.03621	984	-77.01105	-12.06169	1053	-77.00195	-12.10116
778	-77.07734	-12.05961	847	-77.01841	-12.11294	916	-77.04380	-12.03658	985	-77.03816	-12.05507	1054	-76.99903	-12.09343
779	-77.07731	-12.05960	848	-77.01782	-12.11287	917	-77.03282	-12.03194	986	-77.03701	-12.06295	1055	-76.98186	-12.09043
780	-77.07667	-12.05953	849	-77.00505	-12.12269	918	-77.02966	-12.04311	987	-77.02572	-12.05092	1056	-76.98014	-12.10263
781	-77.07411	-12.03677	850	-77.00162	-12.11203	919	-77.02943	-12.04088	988	-77.02476	-12.04804	1057	-76.98025	-12.10331
782	-77.06594	-12.03842	851	-76.99726	-12.11230	920	-77.02824	-12.03264	989	-77.06690	-12.08823	1058	-77.04796	-12.08951
783	-77.06315	-12.06239	852	-77.02368	-12.13939	921	-77.02689	-12.03759	990	-77.03134	-12.11358	1059	-77.04666	-12.09397
784	-77.06214	-12.06748	853	-77.02217	-12.13971	922	-77.00749	-12.08841	991	-77.03014	-12.12119	1060	-77.04269	-12.09185
785	-77.05366	-12.04758	854	-77.02210	-12.14012	923	-77.00285	-12.09187	992	-77.02476	-12.12346	1061	-77.10011	-12.07640
786	-77.04755	-12.04375	855	-77.02003	-12.14807	924	-77.00253	-12.09403	993	-77.07047	-12.06756	1062	-77.09590	-12.07921
787	-77.04058	-12.04772	856	-77.06244	-12.05294	925	-77.00023	-12.11193	994	-77.00476	-12.08951	1063	-77.09503	-12.07772
788	-77.03223	-12.07543	857	-77.04214	-12.05441	926	-76.99395	-12.11068	995	-77.00396	-12.08386	1064	-77.09127	-12.06918
789	-77.02877	-12.05207	858	-77.05700	-12.08926	927	-76.99345	-12.08153	996	-77.02194	-12.09153	1065	-77.07660	-12.08926
790	-77.04696	-12.08942	859	-77.05699	-12.08419	928	-76.99317	-12.08439	997	-77.09791	-12.08346	1066	-77.01764	-12.13219
791	-77.04594	-12.08513	860	-77.04931	-12.07376	929	-76.98978	-12.10163	998	-77.08503	-12.08935	1067	-77.00136	-12.14128
792	-77.04571	-12.08397	861	-77.04442	-12.06941	930	-76.98480	-12.10335	999	-77.07779	-12.07032	1068	-76.99764	-12.12668
793	-77.03833	-12.08410	862	-77.04431	-12.06860	931	-77.05331	-12.09279	1000	-76.99288	-12.14143	1069	-76.99676	-12.12868
794	-77.03713	-12.08955	863	-76.94984	-12.09019	932	-77.04703	-12.09622	1001	-76.98923	-12.11281	1070	-76.99553	-12.16832
795	-77.03349	-12.08321	864	-77.02968	-12.06463	933	-77.01045	-12.08995	1002	-76.98731	-12.13778	1071	-76.99251	-12.13305
796	-77.06567	-12.08981	865	-77.02756	-12.07912	934	-76.99618	-12.08165	1003	-76.98449	-12.11278	1072	-76.99207	-12.13496
797	-77.05674	-12.09094	866	-77.02687	-12.06443	935	-76.99485	-12.06458	1004	-77.02295	-12.10252	1073	-76.99171	-12.13063
798	-77.04771	-12.11108	867	-77.02469	-12.07497	936	-76.99426	-12.06410	1005	-77.01862	-12.11083	1074	-76.98974	-12.13384
799	-77.03700	-12.11037	868	-77.02021	-12.07424	937	-76.99019	-12.06453	1006	-76.99609	-12.11210	1075	-76.98762	-12.13472
800	-77.03631	-12.10951	869	-77.01940	-12.08114	938	-77.07792	-12.03575	1007	-77.02074	-12.13889	1076	-76.98619	-12.12266
801	-77.02109	-12.12712	870	-77.01726	-12.08223	939	-77.04995	-12.02313	1008	-76.93975	-12.06894	1077	-76.98069	-12.11791
802	-77.00108	-12.12858	871	-77.01522	-12.06128	940	-77.04364	-12.03668	1009	-77.07322	-12.09264	1078	-76.97598	-12.12180
803	-77.07990	-12.07525	872	-77.01431	-12.08332	941	-77.10100	-12.07557	1010	-77.07405	-12.07592	1079	-76.97466	-12.10411
804	-77.06566	-12.07856	873	-77.01404	-12.08272	942	-77.09615	-12.08432	1011	-77.06329	-12.08114	1080	-77.00940	-12.11477
805	-77.06555	-12.07872	874	-77.01351	-12.06503	943	-77.08942	-12.07888	1012	-76.99317	-12.09355	1081	-77.00328	-12.11571
806	-77.06228	-12.06754	875	-77.01027	-12.06314	944	-77.08869	-12.07794	1013	-77.05144	-12.10290	1082	-76.99586	-12.11218
807	-77.00956	-12.09367	876	-76.99762	-12.06876	945	-77.08626	-12.07828	1014	-77.02339	-12.14016			
808	-77.00127	-12.09058	877	-77.07722	-12.06795	946	-77.07915	-12.07411	1015	-77.02323	-12.14142			
809	-76.99668	-12.08673	878	-77.07525	-12.05524	947	-77.07909	-12.08329	1016	-77.04795	-12.06203			

ANEXO 2: Función - k de Ripley.

Una técnica muy popular para analizar la correlación espacial en patrones puntuales es la función - K , propuesta por Ripley (1976).

$d_{ij} = \|u_i - u_j\|$ entre todos los pares ordenados de puntos diferentes u_i y u_j pertenecientes al patrón puntual x . Estas distancias claramente capturan una gran cantidad de información acerca del patrón puntual. Si en el patrón existen clústers, muchas de las distancias serán pequeñas, si el patrón es regular pocas distancias serán pequeñas. Consideramos la función de distribución acumulada empírica de las distancia entre pares:

$$\bar{H}(r) = (1/n(n+1)) \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{1}[d_{ij} \leq r]$$

donde n es el número de puntos del patrón puntual y $n(n+1)$ es el número de pares de puntos distintos del patrón puntual.

La contribución de cada punto a u_i a la suma es $t_i(r) = \sum_{j \neq i} \mathbf{1}[d_{ij} \leq r]$, y representa al número de otros puntos u_j que se encuentran hasta una distancia r . Llamaremos a este, el número de r -vecinos para el punto u_i . Equivalentemente $t_i(r)$ es el número de puntos que caen dentro de un círculo de radio r centrado en u_i , sin contar u_i . Entonces:

$$\bar{H}(r) = (1/(n-1))\bar{t}(r)$$

donde $\bar{t}(r) = (1/n) \sum_i t_i(r)$, es el número promedio de r -vecinos para un punto de X .

Por otra parte el número promedio de r -vecinos de un dato puntual podría depender de la intensidad promedio de todos los puntos en el patrón puntual. En un patrón completamente aleatorio, podríamos esperar $\bar{t}(r)$ este cerca de $\rho\pi r^2$, desde que $\bar{t}(r)$ cuenta el número de puntos que caen al interior de un círculo de radio r el cual tiene área πr^2 . En principio para hacer posible la comparación de distintos patrones puntuales, se estandariza $\bar{t}(r)$ dividiendo por ρ . Desde que el máximo números de vecinos de cualquier punto es $n-1$, es más apropiado dividir por $\tilde{\rho} = (n-1)/|W|$, donde n es el número de puntos y $|W|$ es el área de la ventana de observación. El resultado de la estandarización es $\bar{t}(r)/\{(n-1)/|W|\} = |W|\bar{H}(r)$. La función $|W|\bar{H}(r)$ es el número promedio estandarizado de r -vecinos de un dato puntual.

En principio para poder comparar patrones puntuales observados en distintas ventanas, necesitamos tomar en cuenta los *efectos de borde*. Esto conduce a una pequeña modificación de la función $|W|\bar{H}(r)$, llamada la función $-K$ empírica:

$$\bar{K}(r) = \frac{|W|}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{1}[d_{ij} \leq r] e_{ij}(r)$$

En resumen, la función - K empírica $\bar{K}(r)$, es el número promedio acumulativo de puntos de datos que se encuentran dentro de una distancia r de un punto de datos típico, corregido por los efectos de borde, y estandarizado mediante la división por la intensidad. La normalización y la corrección de borde hacen posible la comparación de patrones de punto con diferentes números de puntos, observados en diferentes ventanas.

Si X es un proceso puntual estacionario, con intensidad homogénea $\rho > 0$, entonces para cualquier $r \geq 0$:

$$K(r) = (1/\rho)\mathbb{E}[t(u, r, X)|u \in X]$$

no depende de la ubicación de u y es llamada la función - K de X .

La fórmula explícita para la función - K ha sido derivado para el modelo de proceso puntual Poisson. En el caso del proceso puntual Poisson homogéneo, desde que los puntos son independientes, la presencia de un punto aleatorio en la ubicación u no tendría relación con la presencia de puntos en otras posiciones, así:

$$\mathbb{E}[t(u, r, X)|u \in X] = \mathbb{E}[t(u, r, X)]$$

donde $t(u, r, X)$ es el número de puntos de X que caen en el disco $b(u, r)$ de radio r centrado en u . El número esperado de tales puntos es $\rho\pi r^2$. Dividiendo por la intensidad ρ , en el caso del proceso Poisson homogéneo bidimensional, se tiene:

$$K_{pois}(r) = \pi r^2$$

$$L_{pois}(r) = r$$

ANEXO 3: Modelos log-lineales simples

Algunos modelos simples de la forma log-lineal, son descritos en Baddeley et al. (2016), las cuales se mencionan a continuación:

1. Modelo de intensidad proporcional a una línea de base

Un modelo fácil de analizar en el que la intensidad es un múltiplo desconocido de una conocida *línea base* (baseline). La función de verosimilitud en este caso es:

$$\rho(u) = \theta b(u)$$

donde $b(u)$ es una función conocida (baseline) y θ es un parámetro desconocido que debe ser estimado. Si la línea de base $b(u)$ representa la variación espacial de la intensidad de una población (densidad poblacional), y suponemos que cada miembro de la población tiene igual probabilidad de contraer una enfermedad rara, entonces los casos de la enfermedad podrían formar un proceso Poisson con intensidad (9.3), conocido como el modelo de “*riesgo constante*”.

Reemplazando la expresión de la intensidad en la función de log-verosimilitud, se obtiene:

$$\begin{aligned} \log L(\theta; x; W) &= \sum_{i=1}^n \log\{\theta b(x_i)\} - \int_W \{\theta b(u)\} du \\ \log L(\theta; x; W) &= n \log \theta + \sum_{i=1}^n \log b(x_i) - \theta \int_W b(u) du \end{aligned}$$

Derivando con respecto a θ para un x fijo, incluso si $b(u)$ no es continuo, el vector score es:

$$U(\theta) = \frac{d}{d\theta} \log L$$

$$U(\theta) = \frac{n}{\theta} - \int_W b(u) du$$

Si no existen restricciones sobre θ , el estimado de máxima verosimilitud de θ es la solución de la ecuación del score $U(\theta) = 0$, lo que conduce:

$$\hat{\theta} = n / \int_W b(u) du$$

$\hat{\theta}$ coincide también con el estimado por el Método de Momentos, ya que bajo el modelo de *línea base*, el número esperado de puntos es $\mathbb{E}_\theta[n(X)] = \int_W \rho_\theta(u) du = \theta \int_W b(u) du$, tal que $\hat{\theta}$ es la solución de $n(x) = \mathbb{E}_\theta[n(X)]$.

2. Modelo de intensidad como función exponencial de una covariable

Un modelo muy importante, es cuando:

$$\rho(u) = \kappa e^{\beta Z(u)} = \exp(\alpha + \beta Z(u))$$

donde $Z(u)$ es una covariable espacial y α, β, κ son parámetros a estimar. Este es el modelo que está ajustado en las aplicaciones básicas de regresión logística y de máxima

entropía. Un ejemplo importante se da en el análisis de prospectividad, donde $Z(u)$ es la distancia desde la ubicación u a la falla geológica más cercana. El parámetro $\kappa = e^\alpha$ brinda la intensidad en lugares en los que $Z(u) \approx 0$ (es decir, en los alrededores de una falla geológica), mientras que la intensidad cambia en un factor de e^β por cada unidad de distancia de las fallas.

3. Modelo de incidencia elevada

Una combinación de los dos últimos modelos, es:

$$\rho(u) = b(u) \exp\{\alpha + \beta Z(u)\}$$

donde $b(u)$ es una función de línea de base conocida y $Z(u)$ es una covariable espacial. Este modelo expresa el efecto de covarianza en relación con la línea de base $b(u)$. Por ejemplo, en la epidemiología espacial, $b(u)$ podría ser la densidad de población variable espacialmente, y el término $\exp\{\alpha + \beta Z(u)\}$ sería entonces el riesgo de enfermedad por persona, dependiendo del valor de Z .

ANEXO 4: Código del programa R

```
#####
## I: Procesos Puntuales #####
#####

## Cargar Librerías utilizadas
library(raster) ##Manejo de raster
library(rgdal) ##Lectura de .shp
library(maptools)##Para leer el shape
library(spatstat)##Modelos de PP
library(sp) ##Manejo de datos espaciales
library(ggplot2) #Para el mapeo de datos
library(fields)#Para graficar imágenes
library(ggmap)#Imagen satelite Google
library(classInt)#Intervalos de clase

##Directorio de trabajo y lectura de datos
setwd("D:/Archivo Internet/Dropbox/Tesis/Agraria/DataDelitos")
WindowObs <- readShapePoly("VentanaObsWGS84.shp")##Ventana de observacion
pointsdelitos <- readShapePoints("DelitosClip.shp")##Delitos
cuadDist <- readShapePoly("VentanaObsdistlima.shp")##Poligonos distritales

#####
##### 1.1. - Mapeo de puntos #####
#####
#Datos
data.delitos=data.frame(x=coordinates(pointsdelitos)[,1],
 y=coordinates(pointsdelitos)[,2])
data.window=fortify(WindowObs)

#Creando las etiquetas distritales
x.lab=c(-77.03667,-77.06669,-76.99521,-77.03567,-76.98431,-77.06574,-77.04821,-77.02086,
-77.02893,-77.01299,-76.99724,-77.09007,-77.01739,-76.92573,-77.05059,-77.04887,-77.03268)
y.lab=c(-12.09898,-12.09384,-12.09755,-12.08579,-12.12699,-12.07508,-12.07811,-12.14403,
-12.12091,-12.11344,-12.07409,-12.07644,-12.07233,-12.08809,-12.05916,-12.05103,-12.02358)
lab=c("San Isidro","Magdalena del Mar","San Borja","Lince","Santiago de Surco"
,"Pueblo Libre","Jesus Maria","Barranco","Miraflores","Surquillo","San Luis","San Miguel"
,"La Victoria","La Molina","Breña","Lima Cercado","Rimac")
df.lab=data.frame(x=x.lab,y=y.lab,lab=lab,stringsAsFactors=FALSE)
```

```

#Mapa de puntos
graf.deli=ggplot (data=data.delitos,aes (x=x,y=y))+
geom_polygon (data=data.window,aes (x=long,y=lat),fill="#9ecae1",color="gray60") +
geom_point (size=0.9,color="#3182bd")+
geom_point (aes (x=-76.96,y=-12.01),size=2,color="#3182bd")+
annotate("rect", xmin = -76.96+0.0028, xmax = -76.96+0.0028, ymin = -12.02+0.0025,
ymax = -12.02-0.002,fill="#9ecae1",colour = "gray60")+
annotate(geom="text", x = -76.96+0.035, y=-12.01-0.01,label = "Ventana de obs.(W)",
size=3)+
theme(panel.background = element_rect(fill = "#deebf7"),
panel.grid.major.y = element_blank(),panel.grid.minor.y = element_blank(),
axis.text = element_text(size=7))+
annotate("text", x = df.lab$x, y = df.lab$y, label = df.lab$lab,size = 2.5,
color = "gray10")
graf.deli

#####
### 1.2.- Lectura de puntos y patrones puntuales #####
#####
#Puntos de hechos delictivos-----
pun.deli=data.delitos;coordinates (pun.deli)=c("x", "y");
proj4string(pun.deli)= CRS("+proj=longlat +datum=WGS84 +ellps=WGS84")
#Transformando a UTM 18 Sur
points.deli=spTransform(pun.deli,
CRS("+proj=utm +zone=18 +south +ellps=WGS84 +datum=WGS84 +units=m +no_defs"))

#Creando la ventana de observacion-----
proj4string(WindowObs)= CRS("+proj=longlat +datum=WGS84 +ellps=WGS84")
#Transformando a UTM 18 Sur
w.lima=spTransform(WindowObs,
CRS("+proj=utm +zone=18 +south +ellps=WGS84 +datum=WGS84 +units=m +no_defs"))
w.lima <- as(w.lima,"SpatialPolygons");
W=as(w.lima,"owin")##Ventana de observación

#Creación del patron puntual
x.deli=coordinates (points.deli) [,1];y.deli=coordinates (points.deli) [,2]
ppp.deli=ppp(x=x.deli,y=y.deli>window=W)#Patrón puntual
unitname(ppp.deli)=c("metro", "metros")#Asignamos las unidades
ppp.deli=rescale(ppp.deli, 1000)#Cambiamos a kilometros
unitname(ppp.deli)= c("km", "kms")
plot(ppp.deli,cols="Black",border="Gray80",pch=19,cex=0.5)

#####
### 1.3.- Estimacion de la intensidad #####
#####
#Aleatoriedad Espacial Completa (CSR)
summary(ppp.deli)

#Estimacion de la intensidad kernel
h=0.4#kms:ancho de búsqueda
d=2#bidimensional
xrang=ppp.deli$window$ xrange; yrang=ppp.deli$window$ yrange#Rango para el grid(x,y)
nx=1210;ny=944#Total de puntos en y donde se estimará la densidad
N=nx*ny#Número total de puntos en donde se estimará la densidad
x=as.matrix(data.frame(ppp.deli))
n=nrow(x)#Número de puntos observados delpatrón puntual

###Generamos el grid bidimensional de puntos
delta.x=(xrang[2]-xrang[1])/nx ; delta.y=(yrang[2]-yrang[1])/ny
x_t0=(xrang[1]-delta.x/2) ;y_t0=(yrang[1]-delta.y/2)#Origen (x0,y0) del grid
grid.x=x_t0+(1:nx)*delta.x ;grid.y=y_t0+(1:ny)*delta.y

##Especificamos la funcion kernel
k.e=function(u){(1/sqrt(2*pi))*exp(-0.5*u^2)}#Gaussiana

#Densidades producto(Método óptimo)
unos.n=as.matrix(rep(1,n));
unos.ux=as.matrix(rep(1,nx));unos.uy=as.matrix(rep(1,ny))
U1=(grid.x%*%t(unos.n)-unos.ux%*%t(x[,1]))/h
U2=(grid.y%*%t(unos.n)-unos.uy%*%t(x[,2]))/h
K1=k.e(U1);K2=k.e(U2);rm(U1);rm(U2)
rho.kernel=(1/(h^d))*(K1%*%t(K2))

##Excluimos puntos que caen fuera del Polígono
box.grid=data.frame(x=xrang*1000,y=yrang*1000);coordinates(box.grid)=c("x","y");

```

```

proj4string(box.grid)=
  CRS("+proj=utm +zone=18 +south +ellps=WGS84 +datum=WGS84 +units=m +no_defs")
box.grid=
  spTransform(box.grid,CRS("+proj=longlat +datum=WGS84 +ellps=WGS84 +towgs84=0,0,0"))
box.df=data.frame(box.grid)#Extent en wgs84
##Obtenemos el grid bidimensional de puntos en WGS84
delta.x84=(box.df$x[2]-box.df$x[1])/nx      ; delta.y84=(box.df$y[2]-box.df$y[1])/ny
x_t0_84=(box.df$x[1]-delta.x84/2)      ; y_t0_84=(box.df$y[1]-delta.y84/2)#Origen (x0,y0) grid
grid.x84=x_t0_84+(1:nx)*delta.x84      ; grid.y84=y_t0_84+(1:ny)*delta.y84

#Intersectamos el grid con W
U=expand.grid(x=grid.x84,y=grid.y84);coordinates(U)=c("x","y");
proj4string(U)= CRS("+proj=longlat +datum=WGS84 +ellps=WGS84 +towgs84=0,0,0")
p.dent=over(U,WindowObs)#Intersección U inter W
no.na=!is.na(p.dent)#Valor logico si esta fuera de W
#Seleccionamos los puntos y su densidad en W
u=(data.frame(U)[no.na,]);rho.u=(as.vector(rho.kernel))[no.na]
df=data.frame(u,rho.u);names(df)=c("x","y","z")

#-----
#--MAPAS DE LA INTENSIDAD DE PUNTOS-----
#-----
#Mapeo de la intensidad
graf.dens=ggplot(df, aes(x, y,fill=z)) + geom_raster()+
  geom_point(data=data.delitos, aes(x=x, y=y,fill=2), color="gray10", size=0.5)+
  scale_fill_distiller(palette="RdBu",direction=-1,na.value=NA,guide="colourbar",name="")+
  theme(axis.title= element_blank(),axis.text= element_blank(),
  legend.position = "bottom",legend.key = element_blank(),
  legend.key.width= unit(3.1, "cm"))+
  stat_contour(data=df, aes(x=x, y=y,z=z),colour="gray30",binwidth = 5,bins = 4)+
  annotate("text",x=df.lab$x,y=df.lab$y,label=df.lab$lab,size = 2.8,color = "gray20")
graf.dens

#Superponiendo imagenes satelital Google
df.label.cri=data.frame(x=c(-77.03354,-76.9806455,-77.039416)
  ,y=c(-12.09065,-12.0854059,-12.048422),lab=c("A","B","C"))
map = qmap(location = c(extent(WindowObs)[1],extent(WindowObs)[4],
  extent(WindowObs)[2],extent(WindowObs)[3]), zoom = 12, maptype = 'hybrid',
  resolution = 800)
map.den.goo=map+geom_raster(aes(x=x,y=y,fill=z),alpha =0.35,data=df)+
  coord_cartesian()+scale_fill_distiller(palette="RdBu",
  breaks=c(0,5,10,15,20,25,30,34),name="Intensidad\n")+
  theme(legend.position = "bottom",legend.key.width= unit(2.5, "cm"))+
  annotate("text", x = -77.03354, y = -12.09065, label = "A")+
  annotate("text", x = -76.9806455, y = -12.0854059, label = "B")+
  annotate("text", x = -77.039416, y = -12.048422, label = "C")+
  geom_label(mapping=aes(x=x,y=y,label=lab),data=df.label.cri,alpha=0.15)
map.den.goo

##Puntos críticos
#Punto A
map.crit1 = qmap(location = c(lon =-77.03354, lat =-12.09065), zoom = 15,
  maptype = 'hybrid', resolution=800)
mapA=map.crit1+geom_raster(aes(x=x,y=y,fill=z),alpha =0.45,data=df,interpolate = FALSE)+
  coord_cartesian()+geom_point(data=data.delitos, aes(x=x, y=y,fill=2),
  color="gray10", size=2)+
  scale_fill_distiller(palette = "RdBu",breaks=c(0,5,10,15,20,25,30,34),
  name="Intensidad\n",direction=-1)+
  theme(legend.position = "bottom",legend.key.width= unit(2.7, "cm"))
mapA
#Punto B
map.crit2 = qmap(location = c(lon =-76.9806455, lat =-12.0854059), zoom = 17,
  maptype = 'hybrid', resolution = 800)
mapB=map.crit2+geom_raster(aes(x=x,y=y,fill=z),alpha =0.45,data=df,interpolate = FALSE)+
  coord_cartesian()+
  geom_point(data=data.delitos, aes(x=x, y=y,fill=2), color="gray10", size=2)+
  scale_fill_distiller(palette = "RdBu",breaks=c(0,5,10,15,20,25,30,34),
  name="Intensidad\n",direction=-1)+
  theme(legend.position = "bottom",legend.key.width= unit(2.7, "cm"))
mapB
#Punto C
map.crit3 = qmap(location = c(lon =-77.039416, lat =-12.048422), zoom = 16,
  maptype = 'hybrid', resolution = 800)
mapC=map.crit3+geom_raster(aes(x=x,y=y,fill=z),alpha =0.45,data=df,interpolate = FALSE)+
  coord_cartesian()+ geom_point(data=data.delitos, aes(x=x, y=y,fill=2), color="gray10",
  size=2)+scale_fill_distiller(palette = "RdBu",breaks=c(0,5,10,15,20,25,30,34),
  name="Intensidad\n",direction=-1)+

```

```

theme(legend.position = "bottom", legend.key.width= unit(2.5, "cm"))
mapC

#####
##1.4. - Metodo basado en cuadrantes #####
#####

#-----
#1.4.1.- Basado en la configuración distrital-----
#-----

##Creando los cuadrantes distritales (unidades kms)
n.pol=dim(cuadDist)[1]
for (i in 1:n.pol)
{code.pol=c("owin.pol.",i,"=rescale(as(cuadDist[",i,",], 'owin'),1000)")
eval(parse(text=paste(code.pol,sep="", collapse="")))
}
lis.tess=paste("list(",paste("owin.pol.",1:n.pol,sep="",collapse=","),")",sep="")
pol.dist=as.tess(eval(parse(text=lis.tess)))

##Area de cada distrito en km2
areas.pol=c(); for(i in 1:n.pol){areas.pol=c(areas.pol,area(tess.dist[i]))}

##Prueba de hipotesis para poligonos distritales
test.dist=quadrat.test(ppp.deli,tess=pol.dist);test.dist
#r=seq(from=0.98,to=0.36,length.out=28)

#Mapeando la intensidad de cuadrantes poligonales
intens.cuad=round(test.dist$observed/areas.pol,2)
interv.clase=classIntervals(intens.cuad,5,style="quantile",
intervalClosure=c("left", "right"))
color.den=c("#f7f7f7","#cccccc","#969696","#636363","Gray21")#paleta de color-cuantiles
color.cuad=as.vector(findColours(interv.clase,color.den))#color para cada poligonos
legend.cuad=names(attr(findColours(interv.clase,color.den),"table"))#nombres de leyenda
plot(as(pol.dist,"SpatialPolygons"),col=color.cuad)
plot(ppp.deli, pch=19, cols="Gray50", col.tiles="red", lwd=0.5, border=NA, cex=0.5, add=TRUE)
plot(test.dist, add=TRUE, col="black", cex=0.5, lty=1, lwd=0.5, border="Gray50")
##.- Agregamos la leyenda y etiquetas
legend(x=269.8284,y=8660.049,legend=legend.cuad ,fill=color.den
,box.lwd=1,border="Gray20",ncol=1,cex=0.8 ,text.font=3,text.col="Gray20"
,pty="n" ,title="Intensidad\n(Puntos/km2)",title.col="Black")
pos.dist=coordinates(as(pol.dist,"SpatialPolygons"))
text(x=pos.dist[,1],y=pos.dist[,2], labels=cuadDist$NOMCP_CAP,cex=0.6,col="gray10")

#-----
#1.4.2.- Basado en cudrantes regulares (tiles)-----
#-----

##Creamos los poligonos cuadrados
quad.prue=quadrats(ppp.deli, nx=4, ny=4)$tiles #12 tiles
#Correccion para cerrar poligonos
for (i in 1:12)
{ n.poligonos=length(quad.prue[[i]]$bdry)#Número de poligonos
for (j in 1:n.poligonos)
{quad.prue[[i]]$bdry[[j]]$x=c(quad.prue[[i]]$bdry[[j]]$x,quad.prue[[i]]$bdry[[j]]$x[1])
quad.prue[[i]]$bdry[[j]]$y=c(quad.prue[[i]]$bdry[[j]]$y,quad.prue[[i]]$bdry[[j]]$y[1])
}
}
##Creando una teselacion ( cuadrantes)
SpP=as.tess(list(quad.prue[[1]],quad.prue[[2]],quad.prue[[3]],quad.prue[[4]],
quad.prue[[5]],quad.prue[[6]],quad.prue[[7]],quad.prue[[8]],quad.prue[[9]],
quad.prue[[10]],quad.prue[[11]],quad.prue[[12]]))
##Area de cada tile
areas.pol=c(); for(i in 1:12){areas.pol=c(areas.pol,area(SpP[i]))}

##Prueba de hipotesis
M <- quadrat.test(ppp.deli, nx = 4,ny=4);M;
(M$observed-M$expected)/sqrt(M$expected);M$residuals #Residuales

#Intensidad cuadrantes
intens.cuad=round(M$observed/areas.pol,2)

##Mapeo de la intensidad
set.seed(10);interv.clase=classIntervals(intens.cuad, 5, style = "kmeans", rtimes = 3,
intervalClosure = c("left", "right"))#Intervalos de clase
color.den=c("#f7f7f7","#cccccc","#969696","#636363","Gray21")#paleta de colores
color.cuad=as.vector(findColours(interv.clase,color.den))#color para c/cuadrado

```

```

legend.cuad=names(attr(findColours(interv.clase,color.den),"table"))#texto - leyenda
plot(as(SpP,"SpatialPolygons"),col=color.cuad)
plot(ppp.deli, pch=19, cols="Gray70",col.tiles="red", lwd=0.5,border=NA,cex=0.5,add=TRUE)
plot(M, add=TRUE, col="black", cex=0.7, lty=1, lwd=0.5,border="Gray50")
#Agregamos una leyenda al mapa
legend(x=269.8284,y=8660.049,legend=legend.cuad,fill=color.den,box.lwd=1,border="Gray20"
,ncol=1,cex=0.8,text.font=3,text.col = "Gray20",bty="n",title="Intensidad\n(Puntos/km2) "
,title.col ="Black")

#-----
#1.4.3.- Basado en cuadrantes Dirichlet -----
#-----
#Diagramas de dirichlet
set.seed(2);B=dirichlet(runifpoint(9, ppp.deli$window))
#Correccion para cerrar poligonos
for (i in 1:9)
{n.poligonos=length(B$tiles[[i]]$bdry)#Número de poligonos
  for (j in 1:n.poligonos)
  {
    B$tiles[[i]]$bdry[[j]]$x=c(B$tiles[[i]]$bdry[[j]]$x,B$tiles[[i]]$bdry[[j]]$x[1])
    B$tiles[[i]]$bdry[[j]]$y=c(B$tiles[[i]]$bdry[[j]]$y,B$tiles[[i]]$bdry[[j]]$y[1])
  }
}

#Area de los poligonos
areas.poldiri=c();for(i in 1:9){areas.poldiri=c(areas.poldiri,area(B[i]))};areas.poldiri

#Prueba de hipotesis
qB <- quadrat.test(ppp.deli, tess=B);qB

#Intensidad en tiles de dirichlet
intens.diri=round(qB$observed/areas.poldiri,2)
set.seed(10);interv.clase.diri=classIntervals(intens.diri, 5, style = "kmeans", rtimes = 3
,intervalClosure = c("left", "right"))#Intervalos de clase
color.den.diri=c("#f7f7f7","#cccccc","#969696","#636363","Gray21")#Paleta de colores
color.cuad.diri=as.vector(findColours(interv.clase.diri,color.den.diri))#Color de c/tile
legend.cuad.diri=names(attr(findColours(interv.clase.diri,color.den.diri),"table"))#legend
#Mapeo de la intensidad
PolDiri=as(B,"SpatialPolygons");
plot(PolDiri,col=color.cuad.diri)
plot(ppp.deli, pch=19, cols="Gray65", lwd=0.3,cex=0.5,border=NA,add=TRUE)
plot(qB, add=TRUE, col="black", cex=0.7, lty=1, lwd=1,border="Gray30")
#Agregamos una leyenda al mapa
legend(x=269.8284,y=8660.049,legend=legend.cuad.diri,fill=color.den.diri,box.lwd=1
,border="Gray20",ncol=1,cex=0.8,text.font=3,text.col = "Gray20",bty="n"
,title="Intensidad\n(Puntos/km2)",title.col ="Black")

#-----
#--- Prueba kolmogorov - smirnov: Para la Longitud(x)-----
#-----
spatstat.options(npixel=c(1210,944))#Cantidad de pixeles
KS=cdf.test(ppp.deli, function(x,y) {x});KS
plot(KS,style="cdf",lwd=2,cex.lab=0.7,cex.axis=0.7,col="Black",ylab="Probabilidad"
,xlab="f(x,y)= x",col0="Gray50",lty0=2,cex=0.7,lwd0=1,mgp=c(1.5,0.5,0)
,do.legend=FALSE,main="")
legend(x="bottomright",legend=c("Observado","Esperado"),col =c("Black","Gray50"),
lty=c(1,2),cex=0.7,lwd=c(2,1))

#####
##1.5. - Estadísticas de Resumen#####
#####

####Funcion - K
#Caso homogeneo
functionK=Kest(ppp.deli,correction="none",rmax=1.5)#;
op=par(mfrow=c(2,2),cex.lab=0.7,cex.axis=0.7,mgp=c(1.5,0.5,0),cex=0.7)
plot(functionK,col="Gray60",main="Función k- Ripley (homogeneo)")
#Caso No Homogeneo
densidad <- density(ppp.deli, sigma=0.5,edge=FALSE)
Knohom <- Kinhom(ppp.deli,correction="none",sigma=1.5,rmax=1.5)
plot(Knohom,main="Función - K (no homogeneo)",col="Gray60",xlim=c(0,1.5))

####Funcion - L
#Caso homogeneo
Lc <- Lest(ppp.deli,correction="none",rmax=1.5)
plot(Lc, main = "Función - L (homogéneo)",col="Gray60")

```

```

#Caso no homogéneo
Linhom <- Linhom(ppp.deli, correction="none", rmax=1.5, sigma=1.5)
plot(Linhom, main = "Función - L (no homogéneo)", col="Gray60", xlim=c(0,1.5))
par(op)

###Función de correlación par función - g
#Caso homogéneo
g_fcp=pcf(ppp.deli)
par(mfrow=c(1,2))
plot(g_fcp, main="Función - g (homogéneo)", col="Gray60", ylim=c(0,4.5), xlim=c(0,1.5))
#Caso no homogéneo
g_inhom=pcfinhom(ppp.deli, sigma=1.5, rmax=1.5, kernel = "epanechnikov", correction = "Ripley")
plot(g_inhom, col="Gray60", main="Función - g (no homogéneo)", ylim=c(0,4.5), xlim=c(0,1.5))
par(op)

##Basado en distancias entre pares de puntos###

##Funcion - F: De espacio vacío (u a x).
Fc=Fest(ppp.deli, correction=c("km"))
##Funcion -G (x a x)
Gc=Gest(ppp.deli, correction="km")
#Funcion - J
Jc=Jest(ppp.deli, correction=c("km"), r=Gc$r)

#grafico 3 en 1
par(mfrow=c(2,2)); plot(Fc); plot(Gc); plot(Jc); par(op)

#####
##1.6. - Modelos de procesos puntuales#####
#####

W=as(w.lima, "owin")
W=rescale(W, 1000)

##1.6.1- COVARIABLES ESPACIALES
#-----
#--Distancia a la comisaria mas cercana-----
#-----
dist.comi=raster("DistanciaComisariaSerenazgo2.tif")
m.dist=as.matrix(dist.comi)/1000; n.dist=dim(m.dist)[1]; m.distOrd=m.dist[n.dist:1,]
im.dist <- as.im(X = m.distOrd, W = W, eps=c(20,20))

#-----
#--Distancia al límite distrital-----
#-----
dist.lim=raster("DistanciaLimite31_3.tif")
m.lim=as.matrix(dist.lim)/1000; n.lim=dim(m.lim)[1]; m.limOrd=m.lim[n.lim:1,]
im.lim <- as.im(X = m.limOrd, W = W, eps=c(20,20))
#-----
#-Presupuesto Municipal-----
#-----
dist.pres=raster("PresupuestoLimite31_2.tif")
m.pres=as.matrix(dist.pres); n.pres=dim(m.pres)[1]; m.presOrd=m.pres[n.pres:1,]
im.pres <- as.im(X = m.presOrd, W = W, eps=c(20,20))

#-----
#---Densidad poblacional-----
#-----
dens=raster("DensidadPobRad1000.tif")
m.dens=as.matrix(dens); n.dens=dim(m.dens)[1]; m.densOrd=m.dens[n.dens:1,]
im.dens <- as.im(X = m.densOrd, W = W, eps=c(20,20))

####Graficando las covariables#####
library(RColorBrewer)
colorpunto=rgb(red=.30, green=.30, blue=.30, alpha=0.2, maxColorValue = 1)
pal.col=colorRampPalette(brewer.pal(9, "RdBu"))(30)
##distancia a la comisaria
par(mar=c(0.1,0.1,0.1,2))
plot(im.dist, col=pal.col[length(pal.col):1])
plot(W, add=TRUE, border="gray30")
plot(ppp.deli, add=TRUE, pch=19, col=colorpunto, cex=0.7)
##distancia a un límite distrital
plot(im.lim, col=pal.col, breaks=c(0:29/25,4))
plot(W, add=TRUE, border="gray30")
plot(ppp.deli, add=TRUE, pch=19, col=colorpunto, cex=0.7)
##presupuesto
pal.col.pre=colorRampPalette(brewer.pal(9, "RdBu"))(10)

```

```

plot(im.pres,col=pal.col.pre,breaks=c(0,10,20,30,40,60,80,100,200,400,500))
plot(W, add=TRUE,border="gray30")
plot(ppp.deli, add=TRUE,pch=19,col=colorpunto,cex=0.7)
##densidad poblacional
plot(im.dens,col=pal.col[length(pal.col):1])
plot(W, add=TRUE,border="gray30")
plot(ppp.deli, add=TRUE,pch=19,col=colorpunto,cex=0.7)

#-----
#-MODELOS ESTADÍSTICOS-----
#-----
spatstat.options(npixel=c(1210,944))
options(digits=7)

##Proceso Poisson Estacionario (homogéneo)
mod0=ppm(ppp.deli~1);summary(mod0)

#-----
#--Modelos univariados - Proceso Poisson no estacionario
#-----
##Distancia a una comisaria o serenazgo
mod1 = ppm(ppp.deli~(im.dist<0.11))##110metros
summary(mod1)

##Limite distrital
mod2 = ppm(ppp.deli~im.lim)
summary(mod2)

##Presupuesto
mod3 = ppm(ppp.deli~(im.pres>60))##Limite distrital
summary(mod3)

##Densidad poblacional
mod4 = ppm(ppp.deli~im.dens)##Limite distrital
summary(mod4)

#-----
#Modelos con multiples covariables - Proceso Poisson no estacionario---
#-----
mod5 = ppm(ppp.deli~(im.dist<0.11)+im.lim+(im.pres>60)+im.dens)
mod6 = ppm(ppp.deli~im.lim+(im.pres>60)+im.dens,eps=c(20,20))
mod7 = ppm(ppp.deli~im.lim+(im.pres>60),eps=c(20,20))
mod8 = ppm(ppp.deli~im.lim+im.dens,eps=c(20,20))

#-----
#--Seleccion del modelo-----
#-----
anova(mod6, mod5, test="LR")
anova(mod7, mod6, test="LR")
anova(mod8, mod6, test="LR")
anova(mod0, mod8, test="LR")
anova(mod1, mod8, test="LR")
anova(mod2, mod8, test="LR")
anova(mod3, mod8, test="LR")
anova(mod4, mod8, test="LR")

##Valores predichos en el mejor modelo
plot(mod8, how="image", se=FALSE,ngrid = c(1210,944))

#-----
##Modelo Cluster (Neyman -Scott)with Cauchy kernel-----
#-----
mod9 <- kppm(ppp.deli~im.lim+im.dens,clusters="Cauchy")
summary(mod9)

#Graficos
par(mar=c(0,0,0,1))
plot.kppm(mod9,ngrid = c(1210,944),what=c("intensity"),col=pal.col[length(pal.col):1],
,cex=0.7)
par(mar=c(0,0,0,1))
plot.kppm(mod9,what=c("cluster"),locations=ppp.deli,col=pal.col[length(pal.col):1])
plot.kppm(mod9,what=c("statistic"))

#-----
##Diagnostico de residuales-----
#-----
residuals.ppm(mod8)

```

```
par(mar=c(0,0,0,0))
diagnose.ppm(mod8,type="raw",oldstyle=TRUE,sigma=NULL)

##ANEXO 1:Método kernel para la densidad(gaussiano estandar)
##Implementado en spatstat
spatstat.options(npixel=c(1210,944))#Cantidad de pixeles
dens.deli=density.ppp(ppp.deli,sigma=0.4#Ancho de búsqueda(b=400 metros)
,edge=FALSE,at="pixel",weights = NULL,diggle=FALSE
,dimyx=c(1210,944)#Cantidad de filas y columnas
)
```