

**UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
LA MOLINA**

**ESCUELA DE POSGRADO
MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA DE ALIMENTOS**



**“DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD TÉRMICA Y PERFILES
DE TEMPERATURA DE LA PAPA (*Solanum tuberosum*)
DURANTE EL CALENTAMIENTO EN UN MEDIO LÍQUIDO”**

Presentada por:

JOSÉ FRANCISCO MORO PISCO

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE
MAGISTER SCIENTIAE EN TECNOLOGÍA DE ALIMENTOS**

Lima Perú

2020

**UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA
LA MOLINA**

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA DE ALIMENTOS

**“DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD TÉRMICA
Y PERFILES DE TEMPERATURA DE LA PAPA
(*Solanum tuberosum*) DURANTE EL ALENTAMIENTO
EN UN MEDIO LÍQUIDO”**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE
MAGISTER SCIENTIAE**

Presentada por:

JOSÉ FRANCISCO MORO PISCO

Sustentado y aprobado ante el siguiente Jurado:

Ing. M.Sc. Carlos Elias Peñafiel
PRESIDENTE

Ing. M.Sc. Francisco Salas Valerio
ASESOR

Dr. Milber Ureña Peralta
MIEMBRO

Dr. Pedro Quiroz Quezada
MIEMBRO

DEDICATORIA

A la memoria de mi Madre Lolita Pisco, mi reina, mi renacimiento y mi verdad.

Cuando hay amor, la muerte no puede separar totalmente a dos personas y quien se va de este mundo sigue viviendo en la memoria de quien se queda. Pues también dedico a mi padre Marciano y hermana Benita, donde mis tres familiares queridos fueron víctimas de esta pandemia viral.

Te amo mi Dios por ser grande en misericordia, tú vives y vivirás por siempre, Dios de Moisés, Abraham, Isaac, Jacob, David, Salomón, Job y otros más quienes te adoraron, obedecieron y fueron fieles a tu mandato divino hasta la muerte; te pido a que te compadezcas de nosotros tus hijos y de toda la humanidad porque este virus COVID-19 está destruyéndonos.

No permitas que el hombre vanidoso y ciego de su ambición nos siga aniquilando y siga destruyendo tu creación llena de gracia divina.

Cristo vive y vivirá por siempre!!!

AGRADECIMIENTO

- Muy especialmente a mi Asesor de Tesis, Ing. MSc. Francisco Salas Valerio, por la acertada orientación, el soporte y discusión crítica que me permitió un buen aprovechamiento en el trabajo realizado, y que esta Tesis llegara a buen término.
- Al Ex-Rector de la UNAS, excelentísimo Dr. Cesar Augusto Mazabel Torres, por ser un gran Padre, gran personaje académico, gran ejemplo a seguir, y Esposa Sra. Berthita Castre de Mazabel (QEPD) a quien tuve el privilegio de conocerlo y considero como una persona muy sensible, pendiente de los aspectos más humanos, entusiasta y optimista, y que me brindó su invaluable apoyo y confianza durante una etapa de mi vida y desarrollo profesional; descansa en paz, gracias por siempre.
- Finalmente agradezco a Genaro Correa Huaripata a quien considero como mi hermano mayor que con su muy temprano ejemplo académico y perseverante, supo transmitir a todos sus sobrinos la crema y nata de su talento y el gran emprendimiento académico.

ÍNDICE GENERAL

I. INTRODUCCIÓN	1
II. REVISIÓN DE LITERATURA	3
2.1 La papa	3
2.2 Transferencia de calor	4
2.2.1 Conducción	5
2.2.2 Convección	6
2.2.3 Radiación	6
2.3 Difusividad térmica	7
2.4 Perfiles de temperatura	10
2.5 Difusividad térmica de camotes	11
2.6 Modelamiento de las propiedades térmicas de kekes durante el horneado	12
2.7 Simulación de la temperatura en el calentamiento	12
2.8 Transferencia de calor en hamburguesas de carne durante el cocinado en ambos lados	13
2.9 Predicción de perfiles de humedad en la papa y zanahoria durante el secado convectivo con aire caliente usando la difusividad efectiva medida isotérmicamente	14
2.10 Simulación numérica de congelación rápida individual de alimentos esféricos	14
2.11 Análisis del coeficiente de transferencia de calor (h) durante la fritura de papas	15
III. MATERIALES Y MÉTODOS	16
3.1 Lugar de ejecución	16
3.2 Materia prima	16
3.3 Materiales y Equipos	16
3.3.1 Materiales	16
3.3.2 Equipos	16

3.4	Metodología Experimental	17
3.4.1	Determinación de las dimensiones de la Papa	17
3.4.2	Determinación de la difusividad térmica (α)	18
	a. Sistemas y aparatos de medición	18
	b. Metodología de la medición	20
	c. Procedimiento de cálculo	20
3.4.3	Obtención experimental de la temperatura ($T_{i,j}$) a diferentes posiciones en la papa	23
3.4.4	Elaboración de un programa de simulación en VisualBasic Excel para simular los perfiles de temperatura	26
3.4.5	Validación del programa de simulación	28
3.5	Análisis Estadístico	28
IV.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	29
4.1	Dimensiones de la papa	29
4.2	Determinación de la Difusividad Térmica (α) de la papa.	30
4.3	Obtención experimental de la temperatura ($T_{i,j}$) a diferentes posiciones en la papa	32
4.3.1	Historial de las temperaturas experimentales en las diferentes posiciones de la papa en los veinte primeros minutos	33
4.3.2	Representación gráfica del historial de temperaturas experimentales en los seis diferentes puntos de la malla (nodos de temperatura)	34
4.3.3	Perfiles de temperatura en cada posición del sensor	34
4.3.4	Conjunto de curvas de cada posición del sensor	38
4.4	Programa de Simulación en Visual Basic Excel para simular los perfiles de temperatura	39
4.5	Validación del Programa de Simulación	41
4.5.1	Comparación del perfil de los resultados experimentales y resultados simulados	52
4.5.2	Comparación estadística de los resultados experimentales versus resultados simulados	53
V.	CONCLUSIONES	55
VI.	RECOMENDACIONES	56
VII.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	57
VIII.	ANEXOS	64

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	Valores típicos de la difusividad térmica (α) de algunas hortalizas	9
Tabla 2	Valores de las variables B_n y $J_1(B_n)$	22
Tabla 3	Promedio del radio equivalente (r_e) de tres muestras de papa por cada proyección efectuada sobre el papelógrafo	29
Tabla 4	Posiciones y penetración del sensor por cada muestra de papa	30
Tabla 5	Valores de las temperaturas halladas experimentalmente	33
Tabla 6	Resultados de la simulación de la transferencia de calor para una esfera con diámetro (\emptyset)= 0,07654 m sometida a calentamiento en un medio líquido	42
Tabla 7	Comparación de la temperatura simulada (nodo 5) y la temperatura experimental 1	45
Tabla 8	Comparación de la temperatura simulada (nodo 6) y la temperatura experimental 2	46
Tabla 9	Comparación de la temperatura simulada (nodo 7) y la temperatura experimental 3	48
Tabla 10	Comparación de la temperatura simulada (nodo 8) y la temperatura experimental 4	49
Tabla 11	Comparación de la temperatura simulada (nodo 9) y la temperatura experimental 5	51
Tabla 12	Comparación de temperaturas experimentales y temperaturas simuladas por cada posición del sensor	54

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Equipo de medición de difusividad térmica	19
Figura 2	Dimensiones del sensor ST 039850	25
Figura 3	Posiciones del sensor para graficar curvas de Temperatura – Tiempo	25
Figura 4	Curva de penetración de calor de la primera evaluación experimental	31
Figura 5	Curva de penetración de calor de la segunda evaluación experimental	31
Figura 6	Temperaturas experimentales obtenidas en cada posición del sensor	34
Figura 7	Perfil de temperatura en la 1ra. Posición = [0,0] = Centro	35
Figura 8	Perfil de temperatura en la 2da. Posición = [0,2]	36
Figura 9	Perfil de temperatura en la 3ra. Posición = [0,4]	36
Figura 10	Perfil de temperatura en la 4ta. Posición = [0,6]	37
Figura 11	Perfil de temperatura en la 5ta. Posición = [0,8]	37
Figura 12	Perfil de temperaturas de cada posición de la papa en donde hay sensor	38
Figura 13	Visualización de las temperaturas en el Programa de simulación	40
Figura 14	Perfiles de temperatura de los diferentes nodos simulados para la transferencia de calor de una esfera sometida a un medio de calentamiento.	44
Figura 15	Perfil de temperatura simulada y temperatura experimental en el punto 1.	46
Figura 16	Perfil de temperatura simulada y temperatura experimental en el punto 2.	47
Figura 17	Perfil de temperatura simulada y temperatura experimental	

	en el punto 3.	49
Figura 18	Perfil de temperatura simulada y temperatura experimental en el punto 4.	50
Figura 19	Perfil de temperatura simulada y temperatura experimental en el punto 5.	52
Figura 20	Comparación de los resultados experimentales y resultados simulados	53

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo de investigación fue determinar la difusividad térmica de la papa y modelar la transferencia de calor y la temperatura en la papa (*Solanum tuberosum l.*) durante el calentamiento en un medio líquido. Se utilizaron papas de la variedad Yungay. La metodología experimental se realizó mediante cinco etapas, tales como: determinación de las dimensiones características de la papa (diámetro equivalente), determinación de la difusividad térmica (α), obtención experimental de la temperatura a diferentes posiciones dentro de la papa con una temperatura del medio líquido a 70°C, el modelamiento se hizo con la ecuación de transferencia de calor por conducción en una sola dirección y la solución de dicha ecuación se realizó usando la metodología de las diferencias finitas (hacia adelante) el cual se elaboró de un programa de computación en Visual Basic Excel® para simular los perfiles de temperatura y por último se compararon los valores simulados con los valores experimentales. Los valores de la difusividad térmica se obtuvieron utilizando la curva de calentamiento de las muestras a la temperatura de 70°C. El valor del diámetro equivalente fue de 7,6536 cm. El valor experimental de la difusividad térmica (α) de la papa fue $1,49 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ la cual está dentro de lo esperado para raíces y tubérculos. Así mismo, se comparó los perfiles de temperaturas simulados con los perfiles de temperaturas experimentales en diferentes posiciones y se encontró que la temperatura central experimental se logró un buen ajuste con un nivel de error entre 1,37% y 7,83%.

Palabras claves: Papa, difusividad térmica, diferencias finitas, simulación.

ABSTRACT

The objective of this research work was to determine the thermal diffusivity of the potato and to model heat transfer and temperature in the potato (*Solanum tuberosum L.*) during heating in a liquid medium. Potatoes of the Yungay variety were used. The experimental methodology was carried out through five stages, such as: determination of the characteristic dimensions of the potato (equivalent diameter), determination of thermal diffusivity (α), experimental obtaining of the temperature at different positions within the potato with a temperature of liquid medium at 70 °C, modeling was done using the heat transfer equation by conduction in only one direction and the solution of said equation was performed using the methodology of finite differences (forward) was developed from a computer program in VisualBasic Excel® to simulate the temperature profiles and finally the simulated values were compared with the experimental values. The thermal diffusivity values were obtained using the heating curve of the samples at temperatures of 70 °C. The equivalent diameter value was 7,6536 cm. The experimental value of the thermal diffusivity (α) of the potato was $1,49 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ which is within the expected range for roots and tubers. Likewise, the simulated temperature profiles were compared with the experimental temperature profiles in different positions and it was found that the experimental central temperature achieved a good adjustment with an error level between 1,37% and 7,83%

Keywords: Potato, thermal diffusivity, finite differences, simulation.

I. INTRODUCCIÓN

Los procesos de transferencia de calor son importantes para casi todos los aspectos de la preparación de alimentos y desempeñan un papel clave en la determinación de la seguridad alimentaria, tanto en su abastecimiento y en su inocuidad. Si se trata de cocinar, hornear, hervir, freír, asar, escaldado, secar, esterilizar, o la congelación, la transferencia de calor es parte de la transformación de casi todos los alimentos. La transferencia de calor es un proceso dinámico en el que la energía térmica se transfiere de un cuerpo con una temperatura más alta a otro cuerpo con temperatura más baja. Diferencia de temperatura entre la fuente de calor y el receptor de calor es la fuerza impulsora en la transferencia de calor (Zheleva y Kamburova 2009).

El calor ingresa al cuerpo durante el calentamiento y sale del cuerpo en el enfriamiento y en la refrigeración. Los modelos numéricos y observacionales particularmente de procesos alimentarios, ha recorrido un largo camino y se ha convertido en una parte integral de la investigación y el diseño. De este modo, se espera el uso prudente de estos modelos para proporcionar una mejor eficiencia en el sector de la alimentación, proporcionando una mejor comprensión de los procesos y acortar el ciclo de diseño del producto y el proceso (Datta y Rattray 1998).

El tema de la transferencia de calor no es estático, con bastante regularidad, ocurren nuevos desarrollos y los profesionales en este campo disponen continuamente de mejores soluciones analíticas y datos empíricos. La ciencia de la transferencia de calor no sólo trata de explicar cómo puede ser transferida la energía calorífica, sino también trata de predecir la rapidez a la que se realizará este intercambio bajo ciertas condiciones especificadas.

Los más complicados problemas de calor y transferencia de masa se resuelven con éxito mediante el uso de cualquiera de las técnicas de diferencias finitas o técnicas de elementos finitos. Estos métodos numéricos son capaces de manejar cualquier tipo de condición de frontera y la geometría del producto (Ansari 1998).

La papa (*Solanum tuberosum L.*) es un tubérculo muy importante y es una de las hortalizas que proporciona fuentes muy significativas de energía como alimento de uso tradicional, donde la producción anual en el Perú hasta el 2014, fue de 4'571,000 TM/año (INEI, 2014).

Por ser de importancia la producción de la papa, se debe desarrollar una gran tecnología para su respectivo proceso industrial, pues el presente trabajo de investigación servirá de mucho para obtener la difusividad térmica y los perfiles de temperatura durante el calentamiento por inmersión en un medio líquido (agua), donde los efectos del calentamiento y el enfriamiento de los alimentos durante el procesamiento tienen influencias extremadamente importantes sobre la calidad y las características del producto.

Además, servirá en el uso de una tecnología apropiada para facilitar su procesamiento eficaz a los fines que sean orientados. Por lo tanto, los objetivos que se persigue, son los siguientes:

- Determinar la difusividad térmica de la papa (*Solanum tuberosum L.*).
- Modelamiento de la temperatura de la papa en el proceso de calentamiento en diferentes posiciones.
- Elaborar un programa de cómputo utilizando la técnica de diferencias finitas en Visual Basic para simular el calentamiento de este producto a diferentes temperaturas y diferentes posiciones.
- Validar los resultados mediante la comparación de los datos experimentales con los simulados por el programa elaborado.

II. REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 LA PAPA

La papa o patata (*Solanum tuberosum*) es una planta perteneciente a la familia de las solanáceas, originaria de América del Sur y cultivada en todo el mundo por sus tubérculos comestibles. Domesticada en el altiplano andino por sus habitantes hace unos 7000 años, fue llevada a Europa por los conquistadores españoles como una curiosidad botánica más que como una planta alimenticia. Con el tiempo su consumo fue creciendo y su cultivo se expandió a todo el mundo hasta posicionarse como uno de los principales alimentos para el ser humano.

Este tubérculo continúa siendo la base de la alimentación de millones de personas, es una delicia culinaria en muchas regiones del globo que ha generado decenas de platos que la tienen de protagonista y, además, representa un verdadero desafío para científicos de varias disciplinas, que tratan de dilucidar su origen, genética y fisiología. También, dentro del campo de la tecnología, éstos no cesan de encontrar una gran cantidad de aplicaciones más allá de las convencionales para este tubérculo, desde los cosméticos y el alcohol hasta el papel prensa, pasando por bolsas ecológicas de plástico a base de almidón de papa (FAO 2008).

Constituye el sustento alimenticio de los países más poblados del mundo, como China, India y Rusia, que producen y consumen cerca de la mitad de la producción mundial. La papa peruana la que se ha convertido en su selecto producto de exportación en diversas formas: congeladas, precocidas-congeladas, en harina o fécula y en rodajas secas, habiendo encontrado buena acogida en los Estados Unidos y Japón.

A continuación, destacamos las que quizá son las 10 variedades de papa más destacadas del Perú:

Papa regalo (o *marcavalle*), sembrada en tierras vírgenes de las alturas del Mantaro, se denomina así porque es chica y tierna.

Papa amarilla (o *huevo*), pues tiene color y la textura de la yema de un huevo duro. Sus variedades son: *Tumbay*, *Huagalina* (amarilla del norte) y *Limeña* (amarilla de la sierra central).

Papa wairo, tubérculo de forma redondeada u ovalada, ojos profundos de color violeta, piel crema y carne blanca.

Papa peruanita, es un injerto de papa amarilla con papa wairo.

Papa tomasa, es una papa resistente al frío como al calor, pues es menos arenosa que la papa amarilla o la papa Wairo, que tiene a desmoronarse con el calor.

Papa mariva, de características ideales para lograr las papas fritas más crocantes.

Papa Negra, es una papa de cáscara negra y pulpa blanca amarillenta, aplicable a una multiplicidad de usos.

Papa yungay, variedades originarias de Ancash (sierra norte) cuyo cultivo se ha extendido a otras zonas.

Papa rosada (o norteña), variedad cuyo cultivo y consumo están ampliamente difundidos en la costa.

Papa ccompis, tubérculo de color rosado, piel lisa, forma redondeada y tuberosa, ojos profundos, carne amarillenta y consistencia harinosa (Avila 2003).

La importancia de la producción de la papa obliga a desarrollar tecnologías para su respectivo proceso industrial. Pues para ello se han desarrollado trabajos de investigación muy similares que servirán de mucho para determinar la difusividad térmica y de los perfiles de temperatura de la papa o patata (*Solanum tuberosum*) durante el calentamiento por inmersión en un medio líquido (agua).

2.2 TRANSFERENCIA DE CALOR

Cuando se trata de la teoría de transferencia de calor, debe tenerse en cuenta que se hace una distinción entre:

a) la transferencia de calor en estado estacionario, lo que implica temperaturas constantes de los medios de transferencia de calor, y el producto, por ejemplo, calefacción y refrigeración en intercambiadores continuos de flujo de calor; y

b) la transferencia de calor en estado no estacionario, lo que implica que las temperaturas están cambiando continuamente (Holdsworth y Simpson 2007)

La termodinámica y la transferencia de calor son dos ciencias afines que se complementan. La primera predice los requisitos de transferencia de calor de un sistema; la segunda, como se lleva tal transferencia (Manrique 2002).

La transferencia de calor es el estudio de las velocidades a las cuales el calor se intercambia entre fuentes de calor y receptores, mientras que los procesos de transferencia de calor están relacionados con la razones de intercambio térmico que ocurren en los equipos (Herrera 2005).

Existen tres modos de transferencia de calor: conducción, convección y radiación. Cualquier intercambio de energía entre los organismos se produce a través de uno de estos modos o combinaciones de dos o los tres modos: conducción, convección y radiación (Zheleva y Kamburova 2009).

2.2.1 Conducción

En la conducción, la energía molecular se intercambia directamente desde el más caliente de las regiones hasta las más frías, las moléculas con mayor energía que comunican algo de esta energía a las moléculas vecinas con menos energía. La eficacia con que el calor se transfiere a través de un material se mide por la conductividad térmica, K ($W / m / ^\circ K$). La tasa de transferencia de calor por conducción q (W) está dada por:

$$q_{cond} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

Donde, A es el área (m^2) de la sección transversal de la trayectoria del flujo de calor y $\frac{dT}{dx}$ es el gradiente de temperatura, es decir es la razón de cambio de temperatura por unidad de longitud de la trayectoria ($^\circ K/m$). La ecuación 2.1 es conocida como la ecuación de Fourier para la conducción de calor.

2.2.2 Convección

La convección es la transferencia de calor por el movimiento de grupos de moléculas en un fluido. Los grupos de moléculas pueden ser movidos por cualquiera de los cambios de densidad o el movimiento del fluido forzado. Hay dos tipos de convección: convección natural y convección forzada. La transferencia de calor por convección natural se produce cuando un fluido está en contacto con una superficie más caliente o más fría que ella misma. La densidad del fluido disminuye a medida que se hace más caliente y la densidad aumenta como el fluido se enfría. La diferencia en la densidad provoca el movimiento en el fluido que ha sido calentado o enfriado y hace que la transferencia de calor para continuar. La convección forzada se produce cuando un fluido es forzado a pasar un cuerpo sólido y el calor se transfiere entre el fluido y el cuerpo.

El coeficiente de convección, h , es la medida de la eficacia con que un fluido transfiere calor por convección. El coeficiente de transferencia de calor por convección, " h "; se mide en vatios por metro cuadrado por grados kelvin. La razón de transferencia de calor desde una superficie por convección está dada por la ley de Newton:

$$q_{conv} = -hA(T_S - T_{\infty}) \quad (2.2)$$

Aquí A es el área de superficie del objeto, T_S es la temperatura de la superficie, y T_{∞} es la temperatura del medio ambiente o fluido.

2.2.3 Radiación

La transferencia de calor por radiación es la transferencia de energía térmica mediante ondas electromagnéticas, que transfieren el calor de un cuerpo a otro, en la forma en que las ondas de luz electromagnética transfieren energía de la luz. La transferencia de calor por radiación se produce cuando la radiación emitida golpea a otro cuerpo y se absorbe.

La fórmula básica para la transferencia de calor por radiación es la ley de Stefan-Boltzmann:

$$q_{rad} = A\sigma T^4 \quad (2.3)$$

Aquí T es la temperatura absoluta en grados kelvin, σ es la constante de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 5,73 \times 10^{-8} \text{ W / m}^2 / \text{K}^4$, y A es el área en metros cuadrados.

2.3 DIFUSIVIDAD TÉRMICA

Cuanto mayor sea el valor de la difusividad térmica, tanto más rápida será la difusión del calor a través del material. Un valor elevado de la difusividad térmica puede ser el resultado de un alto valor de conductividad térmica, que indicará una elevada rapidez de transferencia de energía o de un valor bajo de la capacidad calorífica. Un valor bajo de la capacidad calorífica significará que se absorberá dentro del material una cantidad menor a la de la energía en movimiento y será utilizada para aumentar la temperatura del material; por tanto, habrá más energía disponible, para transferencias ulteriores (Hollman 1999).

Para resolver el problema de la transferencia de calor es necesario conocer las propiedades térmicas y físicas de los alimentos que definen apropiadamente el comportamiento térmico del alimento durante los procesos que involucren transferencia de calor.

La difusividad térmica es una propiedad derivada, que resulta del ratio de la conductividad térmica entre la densidad y el calor específico; y sugiere una velocidad de calentamiento, por lo tanto siempre está asociado con el estado inestable o flujo de calor transitorio (Mohsenin 1980).

Una propiedad muy utilizada en los cálculos de transmisión de calor por conducción es la difusividad térmica, que se define según ecuación (2.4):

$$\alpha = \frac{K}{\rho C_p} \dots\dots\dots (2.4)$$

El valor de la difusividad térmica (α) de un alimento dado puede calcularse si se conocen su conductividad térmica (K), densidad (ρ) y calor específico (C_p).

Cuyas unidades son:

α = Difusividad térmica (m^2/s)

K = Conductividad térmica ($\text{W}/\text{m } ^\circ\text{C}$)

ρ = Densidad (kg/m^3)

C_p = Calor específico ($\text{kJ}/\text{kg } ^\circ\text{C}$)

Sin embargo, existen expresiones matemáticas que permiten calcular la difusividad térmica según su contenido en agua, según (Ibarz y Barboza 2005).

$$\alpha = 5,7363 \times 10^{-8} X_{AGUA}^m + 2,8 \times 10^{-10} T \dots\dots\dots (2.5)$$

En la que:

α = Difusividad Térmica (m²/s)

X_{AGUA}^m = Fracción másica de agua

T = Temperatura (°K)

Además, la difusividad térmica del alimento solo es función del contenido del agua y de la difusividad térmica de la misma, según (Ibarz y Barboza 2005).

$$\alpha = 8,8 \times 10^{-8} (1 - X_{AGUA}^m) + \alpha_{AGUA} X_{AGUA}^m \dots\dots\dots (2.6)$$

Al igual que otras propiedades térmicas. La difusividad térmica se expresa en función de los componentes: (Ibarz y Barboza 2005).

$$\alpha = \sum(\alpha_i X_i^V) \dots\dots\dots (2.7)$$

Siendo :

α_i = Difusividad térmica del componente i

X_i^V = Fracción volumétrica de dicho componente.

El producto: ρC_p , que se encuentra con frecuencia en el análisis de la transferencia de calor, se llama capacidad calorífica de un material. Tanto el calor específico C_p como la capacidad calorífica ρC_p representan la capacidad de almacenamiento de calor de un material. Pero C_p la expresa por unidad de masa, en tanto que ρC_p por unidad de volumen, como se puede advertir a partir de sus unidades J/kg °C, J/m³ °C; respectivamente.

La difusividad térmica (α), representa cuán rápido se difunde el calor por un material y se define como:

$$\alpha = \frac{\text{Calor conducido}}{\text{Calor almacenado}} = \frac{K}{\rho C_p} \dots\dots\dots (2.8)$$

La conductividad térmica K representa lo bien que un material conduce el calor y la capacidad calorífica ρC_p representa cuanta energía almacena un material por unidad de volumen.

Por lo tanto, la difusividad térmica de un material se puede concebir como la razón entre el calor conducido a través de un material y el calor almacenado por unidad de volumen (Yunus y Cengel 2006). Propiedades tales como la conductividad térmica, calor específico, y densidad, juegan un papel importante en el diseño y análisis de los procesos de alimentos y de los equipos de procesamiento. En situaciones de transferencia de calor en estado no estacionario, las propiedades antes mencionadas varían con la temperatura (Singh y Heldman 2014; Singh y Heldman 2001). Algunos valores de difusividad térmica en hortalizas se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1 : Valores típicos de la difusividad térmica de algunas hortalizas

Alimento	Temperatura (°C)	Difusividad térmica $\times 10^{-7}$ (m ² /s)	Referencia
Arveja	27 a -18	1.24	Gaffney <i>et al.</i> (1980)
Calabaza	25	1.56	Gaffney <i>et al.</i> (1980)
Camote	42	1.2	Gaffney <i>et al.</i> (1980)
Cebolla	20 a 4	1.41	Gordon and Thorne (1990)
Nabo	48	1.34	Gaffney <i>et al.</i> (1980)
Papa	20	1.48	Andrieu <i>et al.</i> (1986)
Papa	24 a 91	1.17	Gaffney <i>et al.</i> (1980)
Papa	60 a 100	1.39–1.46	Tung <i>et al.</i> (1989)
Pepino	20	1.39	Andrieu <i>et al.</i> (1986)
Tomate	23	1.51	Hayakawa and Succar (1983)
Zanahoria	20	1.4	Andrieu <i>et al.</i> (1986)

FUENTE: Vidaurre (2015)

Ozisik (1993) menciona que el significado físico de difusividad térmica está asociado con la velocidad de propagación de calor en el producto sólido. Cuanto mayor es la difusividad térmica más rápida es la velocidad de transferencia de calor. De la misma manera Erdoğan *et al.* (2014), determinan el valor de difusividad térmica (α) y conductividad térmica de plátanos verdes y maduros, utilizando datos experimentales de perfiles de temperatura de refrigeración de papas, encontrando (α) utilizando la solución analítica de un cilindro infinito. Erdoğan (2005), brinda una detallada explicación de cómo utilizar los valores experimentales de ratios de temperatura, para calcular el valor efectivo de difusividad térmica, utilizando sólo el primer término de la solución analítica, considerando como infinito al valor del coeficiente de transferencia de calor por convección. También se han propuesto métodos más sofisticados, como la utilización de láser y detectores de infrarrojos para determinar el valor de difusividad térmica (Cernuschi *et al.* 2004; Woodfield *et al.* 2007). En la literatura existen numerosos modelos matemáticos para predecir las propiedades térmicas y físicas de los alimentos considerando el contenido de agua, sólidos totales, etc., siendo la correlación más utilizada la propuesta por Choi y Okos (1986), debido a que consideran toda la composición del alimento y su dependencia con la temperatura.

2.4 PERFILES DE TEMPERATURA

El calor como un tipo de energía que se transfiere de un cuerpo a otro en virtud de una diferencia de temperaturas y por lo tanto no puede ser almacenado; así mismo, los perfiles de temperatura hace referencia a la forma como cambia la temperatura con respecto a la posición dentro del sólido (Herrera 2005).

No todos los procesos de alimentos son iguales. Cada proceso tiene sus propios retos en términos de espacio, duración y ambiente (vapor, inmersión en agua o aceite). Los riesgos a la salud pública colocan a la industria del procesamiento de alimentos fuertemente en la mira del público. Los efectos de tener errores en procesos de cocción o de congelación pueden ser desastrosos para su negocio.

Las aplicaciones de procesamiento de alimentos más frecuentes para los sistemas de perfilado de temperatura, son: procesamiento de aves, procesamiento de carnes,

procesamiento de pescados y mariscos, horneado, pasteurización, esterilización y otros procesos de alimentos.

Datapaq Ltda (2012), los Ingenieros de proceso saben cuál debe ser el perfil perfecto para sus productos, y las variaciones de ese ideal indican un problema potencial o una calidad inaceptable. Analizando el perfil se puede verificar que: los productos sean de la más alta calidad, aumentar la producción, y resolver problemas de producción.

Además, la creación de perfiles de temperatura de rutina, se utiliza para:

- Configurar rápidamente nuevos procesos.
- Identificar problemas antes de que afecten a la calidad.
- Encontrar fallas rápidamente.
- Aumentar la productividad.
- Demostrar un control de proceso (ISO9000).
- Minimizar costos de combustible.
- Controlar la calidad del producto.

2.5 DIFUSIVIDAD TÉRMICA DE CAMOTES

Se determinó experimentalmente la distribución transitoria de la temperatura para varios tamaños de camotes de la variedad Goldrush calentadas en agua a una temperatura constante de 55°, 70°, 80, y 90°C. Se calculó la difusividad térmica de los camotes de las curvas de tiempo de temperaturas experimentales. Se dio una aproximación de la variación de la difusividad térmica durante el calentamiento de inmersión con temperatura de 27°C a 90°C por la expresión:

$$\alpha = 0,30 \times 10^{-2} + 0,10 \times 10^{-4} T + 0,50 \times 10^{-7} T^4 - 0,55 \times 10^{-9} T^4. \dots\dots(2.9)$$

Usando esta expresión para “ α ” en un programa que resuelve la ecuación de conducción de calor de Fourier para un objeto de forma irregular (por ejemplo: Camote), fue posible duplicar las mediciones experimentales de distribuciones de temperatura transitoria (Wadsworth y Spadaro 1969).

2.6 MODELAMIENTO DE LAS PROPIEDADES TÉRMICAS DE KEKES DURANTE EL HORNEADO

El conocimiento de las propiedades térmicas (conductividad térmica, calor específico y la difusividad térmica del producto) es importante para el modelado matemático y simulación de ordenadores de calor y transporte de la humedad (Rask 1989, Sablani *et al.* 1998). Los modelos avanzados de simulación pueden incorporar propiedades físicas y térmicas reales del producto en lugar de los valores medios a lo largo de todo el proceso. Las propiedades térmicas dependen principalmente de la composición (en particular, contenido de humedad y la expansión de volumen) y la temperatura (Baik *et al.* 1999).

2.7 SIMULACIÓN DE LA TEMPERATURA EN EL CALENTAMIENTO

Se tiene un modelo matemático para describir la distribución de la temperatura transitoria en los camotes durante la inmersión en calor. La ecuación diferencial es:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{1}{r} \left(r \frac{\delta T}{\delta r} \right) + \frac{\delta^2 T}{\delta z^2} \dots\dots\dots (2.10)$$

Dónde:

α = Difusividad térmica (m²/s)

r = radio de la esfera (m)

T = temperatura (°C)

t = tiempo (s)

Al asignar las condiciones límites, la ecuación diferencial es transformado a diferencias finitas para la solución por computadora digital. La breve descripción usa una técnica implícita de dirección alternante para resolver las ecuaciones de diferencias finitas.

Se presentan los resultados obtenidos por computadora mostrando los efectos de las variaciones en la difusividad térmica de los camotes, en el coeficiente de transferencia de calor entre el camote y medio de calentamiento, y longitud y diámetro del camote sobre la distribución transitoria de la temperatura.

Con los resultados presentados, se puede estimar el orden de magnitud al variar la temperatura en los camotes calentados en diferentes condiciones. Sin embargo, para una estimación exacta, debería usar un programa de computadora para calcular la distribución de la temperatura en las condiciones específicas en investigación. Porque el programa no es limitado a la forma de un camote, sería útil para calcular la distribución de temperatura transitoria de cualquier otra fruta, hortaliza u objeto que cumple el criterio planteado en el desarrollo del modelo matemático.

Además, se podría modificar fácilmente el programa para usar productos que tienen un cambio de etapas internas en la difusividad térmica como los melocotones (Wadsworth y Spadaro 1970).

2.8 TRANSFERENCIA DE CALOR EN HAMBURGUESAS DE CARNE DURANTE EL COCINADO EN AMBOS LADOS

Los modelos matemáticos son útiles para la mejor comprensión de los procesos y para tener un mayor control del sistema de cocción.

Se desarrolló un modelo matemático simplificado para predecir los perfiles de temperatura durante el cocinado en sartén de ambos lados de las hamburguesas de carne. La conducción fue considerada el principal mecanismo para la transferencia de calor, y fue usada la fórmula de entalpia para evitar la discontinuidad del problema en el cambio de fase durante el derretido.

El modelo fue solucionado de acuerdo a un método en base a una aproximación de diferencia explícita finita y fue validado comparando los perfiles de temperatura experimental y previstamente obtenida a 163°C y 204°C en la plataforma de abajo y, 177°C y 221°C en la plataforma de arriba; respectivamente.

Los datos experimentales y previstos estuvieron muy de acuerdo. El modelo fue usado para examinar la sensibilidad del cocinado de la hamburguesa a diferentes condiciones del proceso (Zorrilla y Sing 2000).

2.9 PREDICCIÓN DE LOS PERFILES DE HUMEDAD EN LA PAPA Y ZANAHORIA DURANTE EL SECADO CONVECTIVO CON AIRE CALIENTE USANDO LA DIFUSIVIDAD EFECTIVA MEDIDA ISOTÉRMICAMENTE

Para analizar la transferencia de humedad durante el secado convectivo, ha sido desarrollado un modelo de transferencia simultáneo de calor y temperatura basada en la ecuación de difusión de Fick. Lo que era único de este modelo desde los modelos anteriores es la que la difusividad efectiva y su dependencia de temperatura fueron obtenidos en condiciones isotérmicas reales y luego aplicadas al perfil de humedad durante las condiciones de secado no isotérmico.

El modelo predice exactamente las pérdidas de humedad como una función del tiempo de secado y posición para las muestras de papa y zanahoria durante el secado convectivo con aire caliente y además demuestra la importancia y mejor exactitud para obtener los coeficientes de difusión y su dependencia de la temperatura en condiciones isotérmicas (Jaruk y John 2007).

2.10 SIMULACIÓN NUMÉRICA DE CONGELACIÓN RÁPIDA INDIVIDUAL DE ALIMENTOS ESFÉRICOS

La selección y la posterior solución de este modelamiento de la temperatura en la papa entera (*Solanum tuberosum l.*) durante el calentamiento en un medio líquido, requiere de los siguientes supuestos:

- El calor se transfiere radialmente a través de la esfera por conducción.
- La esfera está a una temperatura inicial uniforme y está expuesta de repente en el tiempo cero a un medio de refrigeración.
- El medio de calentamiento se compone de una temperatura y volumen constante.
- Las propiedades termofísicas (calor específico, densidad y conductividad térmica) son constantes en el estado natural, pero son variables en medio líquido a temperaturas mayores. Estas variaciones resultan de la dependencia de la temperatura asociado con las propiedades térmicas de los componentes individuales que componen el producto alimenticio (Wilson y Sing 1987).

2.11 ANÁLISIS DEL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR (h) DURANTE LA FRITURA DE PAPAS

Durante la fritura de patatas, el calor se transfiere de la fritura al medio de la superficie del producto por convección y desde la superficie hacia el interior por conducción. Después de la inmersión en el medio, una pequeña cantidad de aire obstruido dentro del tejido de la papa se expande y da lugar a las primeras burbujas que escapan de la papa. La superficie de la patata se calienta hasta la temperatura del bulbo húmedo y el agua comienza a vaporizarse. A medida que avanza la fritura, el frente de evaporación se mueve hacia el centro, la corteza se forma y finalmente la temperatura de la superficie de la papa se eleva a la del aceite.

Se encontró que el burbujeo de vapor estaba relacionado con el agua de la tasa de pérdida y a medida que avanza la fritura, el burbujeo aumenta a un valor máximo y luego disminuye. Varios autores consideran que la fritura es controlada por la transferencia de calor entre el aceite y la papa. Por lo tanto, el conocimiento del coeficiente de transferencia de calor (h) es el más importante para el proceso modelado.

Los valores del coeficiente de transferencia de calor (h) al freír fueron hasta dos veces mayores que los obtenidos en ausencia de burbujeo de vapor y varían con la tasa de pérdida de agua. Aunque el aceite en movimiento causado por las burbujas promueve el aumento de tasas de transferencia de calor, evidenciando que cuando la tasa de pérdida de agua es muy alta, las burbujas cerca de la superficie de la papa puede dificultar la transferencia de calor. El porcentaje de calor transferido a la papa que se usa para la evaporación del agua, aumenta con el tiempo mientras la pérdida de agua es controlada por calor (Costa et al. 1999).

III. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 LUGAR DE EJECUCIÓN

El presente trabajo de investigación se desarrolló en el año 2008 en el Laboratorio de Análisis Físicoquímico de los Alimentos de la Universidad Nacional Agraria La Molina.

3.2 MATERIA PRIMA

Las papas que se usaron en este estudio fueron de la variedad Yungay cultivadas en el Distrito de Canta, Provincia de Lima.

3.3 MATERIALES Y EQUIPOS

3.3.1 Materiales

- Termómetros (0 - 100°C).
- Pinzas.
- Cinta métrica.
- Cuchillo de acero inoxidable.
- Silicona.
- Cronómetro.
- Rejilla Soporte.
- Escalímetro.
- Vernier.
- Papelógrafo cuadriculado.
- Equipo de medición de difusividad térmica.

3.3.2 Equipos

- Equipo de Baño María. (22°C - 100°C). Marca: Memmert, Modelo: DIN12876-3-KL-2 .

- Sensor térmico. 1/16 pulg. de diámetro. Es un transmisor con precisión de 0,25°C y resolución de 0,1°C entre el rango de 10 a 130°C, con una respuesta a cambios de 63% en 8 segundos (agua como medio). Tipo Pt100.
- PC con un software de Programa Visual Basic Excel. Versión. 6,0
- Proyector de Transparencias.
- Equipo de medición de la difusividad térmica. Es de tipo cilíndrico de material acero inoxidable con radio (r) = 24 mm y altura (L) = 240 mm

3.4 METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

Se realizara en cinco etapas:

- a. Determinación de las dimensiones características de la papa.
- b. Determinación de la difusividad térmica (α).
- c. Obtención experimental de la temperatura a diferentes posiciones en la papa.
- d. Elaboración de un programa de simulación en Visual Basic Excel para simular los perfiles de temperatura.
- e. Validación del programa de simulación.

3.4.1 Determinación de las dimensiones de la papa

Para la determinación de la dimensión característica de la papa, se hizo lo siguiente:

- Se colocó el papelógrafo cuadrículado en la pared a una distancia de 2 m del proyector.
- Luego se colocó una regla graduada para determinar la escala o relación entre la medida real de 1 cm y la medida proyectada de 1 cm.
- Luego, se colocó la papa previamente lavada en el proyector para determinar su diámetro equivalente.
- Seguidamente se señaló mediante una línea continua en todo el contorno de la sombra de la papa proyectada en el papelógrafo.
- Luego, se determinó a la escala 50:1 las medidas del diámetro equivalente de la papa que fueron proyectadas en el papelógrafo.

- Después de acuerdo a las mediciones obtenidas en el papelógrafo, se efectuó los cálculos del diámetro equivalente y la ubicación de la posición requerida para la colocación del sensor.
- El diámetro equivalente se determinó tomando el promedio de las tres mediciones obtenidas, tanto del largo, ancho y altura. Además se utilizó una papa para cada prueba, repitiéndose tres veces para cada una de estas pruebas.

3.4.2 Determinación de la Difusividad Térmica (α)

Esta propiedad termofísica es obtenida bajo condiciones de conducción de calor en estado no estacionario. Para el cálculo de esta propiedad térmica se utilizó la ecuación general de conducción de calor, convenientemente integrada, siendo su resolución analítica realizada al asumir que se calienta un cuerpo cilíndrico infinito, aplicándose entonces la serie de Fourier correspondiente. El historial “temperatura-tiempo”, se obtuvo del centro geométrico de la muestra que está preformada como cilindro y bajo determinadas condiciones de entorno.

a) Sistemas y aparatos de medición

La forma de calentamiento resulta del agua que recircula a través del espacio dejado entre la pared lateral del equipo de medición de difusividad térmica y la del cilindro concéntrico que contiene material aislante, tal como se muestra en la Figura 1.

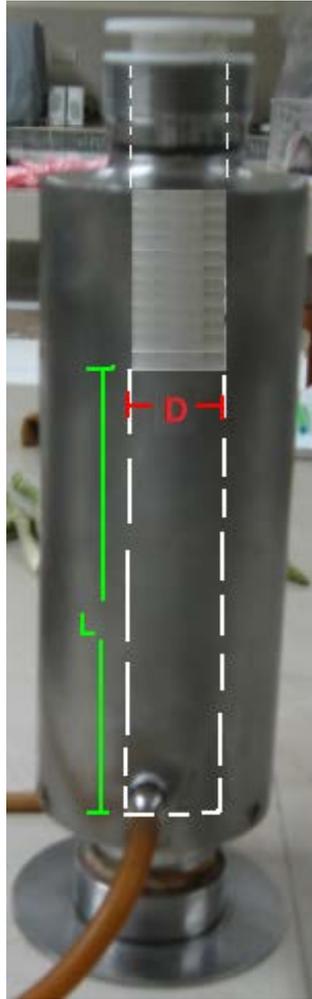


Figura 1: Equipo de medición de difusividad térmica

El agua se calentó en un baño termostatzado para recirculación externa con regulador de temperatura de 0,1 °C de precisión. El caudal experimental con que recircula el agua a través del sistema, fue de: $111 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$. Las dimensiones del equipo de medición de Difusividad Térmica de acero inoxidable, donde se colocó las muestras de papa, fueron de 48 mm de diámetro interior (D) y 240 mm de longitud (L).

Los dos tapones de aislamiento que son de cierre y abertura del cilindro en sus extremos, fue de teflón. El sensor de temperatura va incorporado dentro de la siguiente forma:

- La cabeza de éste alojado dentro de uno de los tapones antes mencionados y, por lo tanto, aislado dentro del sistema, eliminándose así fuentes de error como la transmisión de calor a través de los termopares convencionales cableados. Esto es posible ya que el sensor

lleva un dispositivo de memoria con el que se irá registrando la temperatura conforme se le programe.

- El sensor forma parte del sistema de adquisición de datos de temperatura.
- Un módulo de conexión, uno de almacenamiento, el software de aplicación y un computador completan el sistema.

b) Metodología de medición

Cada papa fue cortada en pequeños cubitos con una aproximación de 0,5 cm de lado y se vertió en la cámara cilíndrica del equipo de medición de difusividad térmica, dicha cámara fue cerrada colocando el tapón donde se alojó el sensor. Luego se atemperó la muestra a la temperatura inicial de trabajo de 23 °C, la que fue medida por encima de su centro geométrico.

El vástago del sensor se ubicó en el eje vertical que pasa por el punto, lo que se logra al insertarlo dentro del orificio del tapón por donde se penetra el sensor. Previamente el sensor ha sido programado para registrar la temperatura del centro geométrico de la mezcla a cada minuto del experimento. Se conecta el aparato al baño térmico y se hace recircular el agua a través del primero. El agua, a temperatura de calentamiento (temperatura asumida como de la interface), debe ingresar al aparato 5 segundos antes de la toma de temperatura correspondiente al tiempo cero, ya que es lo que tarda en llenar la cavidad por donde recircula dentro del aparato.

Terminado el periodo de calentamiento fue cambiado el baño termostatzado para iniciar la etapa de enfriamiento. Ya enfriada la muestra, fue retirado el sensor para ser colocado en el módulo de conexión y se logró transmitir los datos registrados de “temperatura-tiempo” al computador para su almacenamiento y posibilitar así su posterior evaluación.

c) Procedimiento de cálculo

Para la determinación de la difusividad térmica se utilizó el procedimiento descrito por Muñoz (2002), quien afirma lo siguiente:

La difusividad térmica (α) se calcula experimentalmente y consiste en el uso de un tubo cilíndrico de acero cuyos extremos son cubiertos con tapones de teflón de baja difusividad térmica, para simular que se está trabajando con un cilindro infinito.

Las medidas de temperatura son tomadas en el eje central del cilindro y en la superficie del tubo, la cual está expuesta a un baño de agua que se calienta con una velocidad constante. La solución analítica para el caso del calentamiento de un cilindro infinito con temperatura inicial uniforme, puede ser calculada utilizando la función de primera clase de Bessel, como:

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(B_n \frac{r}{r_{max}}\right)}{B_n \cdot J_1(B_n)} \cdot e^{-B_n^2 \cdot F_0} \dots\dots\dots (3.1)$$

Donde:

T_0 = Temperatura inicial de la muestra en el centro térmico (°C) .

T_m = Temperatura del medio de calentamiento (°C) .

T = Temperatura del centro térmico en el instante “ t ” (°C)

r_{max} = Distancia desde el eje longitudinal del cilindro al punto de medición de temperatura (m) .

r = Radio del cilindro (m).

J_0 = Función Bessel de orden cero.

J_1 = Función Bessel de primer orden.

B_n = Raíz “n” de la función Bessel de orden cero, de primera especie.

F_0 = Numero de Fourier

Donde, para un cilindro finito, la transferencia de calor se realiza en forma radial, es decir al considerar, que la medida de temperatura se realiza en el eje central del cilindro ($r = 0$) y que el coeficiente de transferencia de calor en la superficie es bastante alto se tendrá la ecuación (3.2) y con la utilización de la Tabla 2, se puede decir que la ecuación anterior (3.1) para una mayor exactitud en la predicción del valor de “ α ”, sería la ecuación (3.3).

$$\frac{r}{r_{max}} = 0 \dots\dots\dots (3.2)$$

Tabla 2. Valores de las variables B_n y $J_1(B_n)$

Valores de B_n para $J_0(B_n) = 0$	$J_1(B_n) = 0$
B_1	2,4048
B_2	5,5201
B_3	8,6537
B_4	11,7915
B_5	14,9309

FUENTE: Muñoz (2002).

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = 1,6e^{-5,78F_0} - 1,06e^{-30,47F_0} + 0,87e^{-74,89F_0} - 0,73e^{-139,04F_0} + 0,65e^{-222,93F_0} \dots\dots\dots (3.3)$$

Pues para buscar una aproximada exactitud en la predicción del valor de la Difusividad Térmica (α) sería la ecuación (3.4) ya que se trabajó con el primer término de la función de primera clase de Bessel, cuyo primer parámetro es calculado a partir del número de Biot.

Osea :

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{T_e - T}{T_e - T_0} = 1,6 e^{-5,78F_0} \dots\dots\dots(3.4)$$

Donde, el Número de Fourier (F_0) es:

$$F_0 = \frac{\alpha \theta}{r^2} \dots\dots\dots (3.5)$$

Es decir:

$$\frac{T_e - T}{T_e - T_0} = 1,6 e^{-5,78 \frac{\alpha \theta}{r^2}} \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\text{Log} \left(\frac{T_e - T_0}{T_e - T} \right) = \left(\frac{\alpha}{0,398 r^2} \right) \theta - \text{Log} 1,6 \dots\dots\dots (3.7)$$

$$y = mx - \text{Log } 1,6 \dots\dots\dots (3.8)$$

Donde:

T_e = Temperatura de las paredes del cilindro (°C)

T_0 = Temperatura inicial de la muestra (°C)

T = Temperatura en el punto más frío (°C)

θ = Tiempo transcurrido de transferencia de calor (s)

r = Radio del cilindro (m)

α = Difusividad Termica (m²/s)

m = Pendiente de la recta (1/s)

Por lo tanto, la determinación de la difusividad térmica (α) se encontraría de la pendiente de la curva del gráfico de la relación de temperatura con el tiempo, utilizando la ecuación (3.7), donde:

$$m = \frac{\alpha}{0,398 r^2} \dots\dots\dots (3.9)$$

$T_e = T_m$ = Temperatura de las paredes del cilindro a los 70°C, temperatura del medio líquido

T_0 = Temperatura inicial de la muestra (°C), la primera temperatura registrada a los cero (0) minutos.

T = Temperatura en el punto más frío (°C), última temperatura registrada a los 30 minutos.

3.4.3 Obtención experimental de la temperatura ($T_{i,j}$) a diferentes posiciones en la papa.

La determinación de la temperatura se realizó con diferentes papas de diferente tamaño, para posiciones diferentes, respectivamente.

- Primeramente se efectuara la calibración respectiva del sensor.
- Utilizando el Vernier se tomará las medidas del diámetro mayor de la papa.
- Seguidamente se efectuará la división del radio en cinco partes proporcionales, para determinar las posiciones:

$$r = \text{Radio de la Papa} = \text{Radio equivalente de la Papa} (r_e) \dots\dots\dots (3.10)$$

$$\Delta r = \frac{r}{5} = \text{Division del radio de la Papa} \dots\dots\dots (3.11)$$

- Las posiciones de la Papa, son:

$$1 \frac{r}{5} = 1\Delta r = 1ra \text{ Posición} = [0,0] = \text{Centro} = \text{Radio equivalente } (r_e) \dots \dots (3.12)$$

$$2 \frac{r}{5} = 2\Delta r = 2da \text{ Posición} = [0,2] \dots \dots \dots (3.13)$$

$$3 \frac{r}{5} = 3\Delta r = 3ra \text{ Posición} = [0,4] \dots \dots \dots (3.14)$$

$$4 \frac{r}{5} = 4\Delta r = 4ta \text{ Posición} = [0,6] \dots \dots \dots (3.15)$$

$$5 \frac{r}{5} = 5\Delta r = 5ta \text{ Posición} = [0,8] \dots \dots \dots (3.16)$$

- Se tiene que programar el registrador de temperatura Data Trace para que registre las temperaturas cada minuto hasta lograr alcanzar los 30 minutos.
- Se colocó el sensor en las posiciones determinadas, luego de efectuar la medida respectiva de su diámetro equivalente con el Vernier y así sucesivamente se realizó en las otras posiciones, en papas diferentes; previamente calibrado el sensor para cada medición de temperatura a realizar.
- La penetración del sensor se realizó en la papa en su posición correspondiente, según ecuación (3.17) y solamente utilizando como cierta parte de medida de la longitud total de 76 mm de la sonda del Sensor utilizado, tal como se muestra en la Figura 2.

$$Posición = \frac{Penetración}{Radio \text{ de la Papa}} \dots \dots \dots (3.17)$$

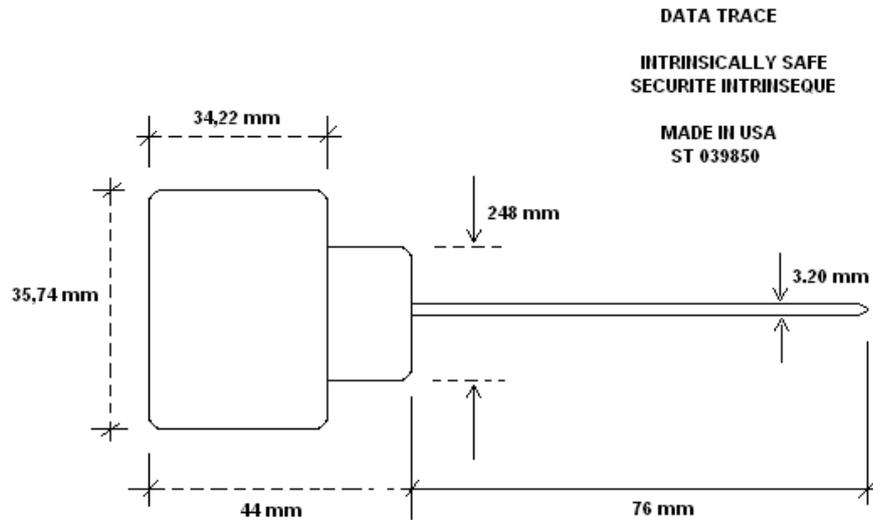


Figura 2: Dimensiones del Sensor ST 039850.

- Al cabo de los 30 minutos, del equipo baño maría en la cual se sumergió la papa con el sensor introducido en su respectiva posición, se sacó con mucho cuidado. Luego se separó el sensor de la papa y se hizo el enfriamiento a medio ambiente por 10 minutos.
- Después de 10 minutos cuando fue enfriado el sensor, se colocó en la interface del sensor para ser compilados los datos almacenados por el software de la computadora portátil.
- Finalmente, las temperaturas que se registró por el sensor en cada minuto durante los 30 min que se le ha programado, se utilizaron para graficar las curvas de cada posición y luego obtener la difusividad térmica (α); tal como se muestra en la Figura 3.

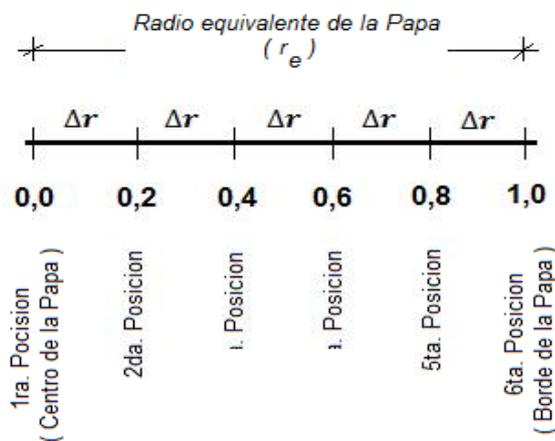


Figura 3: Posiciones del sensor para graficar curvas de Temperatura - Tiempo

3.4.4 Elaboración de un programa de simulación en Visual Basic Excel® para simular los perfiles de temperatura

Se utilizó el lenguaje Visual Basic Excel y se escribió un programa de computadora para calcular la distribución completa de la temperatura transitoria dentro de la papa durante el calentamiento de inmersión.

El programa de simulación, se resolvió por el método de diferencias finita, utilizando el método explícito (hacia adelante).

Las suposiciones en el desarrollo del modelo matemático son que el tubérculo está simétricamente cerca de su eje longitudinal y que la difusividad térmica es isotrópica, es decir que posee las mismas propiedades físicas en todas las direcciones. Los perfiles dimensionales: Temperatura (T) - Tiempo (t), se trazaron de los resultados con el programa antes mencionado usando los siguientes parámetros: La medida longitud-diámetro, la forma de la papa y la temperatura de la superficie se mantendrá igual a la temperatura del baño de agua.

Para obtener la solución de transferencia de calor para una esfera por el método de separación de variable, se utilizó otra ecuación (3.19) que proviene de la ecuación general (3.18) ya que es la ecuación diferencial que representa la transferencia de calor en estado no estacionario de una esfera. (Ozilgen 2011)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (3.18)$$

Si : $\alpha =$ constante, la ecuación (3.18) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (3.19)$$

Donde, la ecuación (3.19) está dada en una sola dimensión, es decir en una sola dirección (r) y las condiciones iniciales y de frontera son:

$$T_{(r,0)} = T_0 \dots\dots\dots (3.20)$$

$$\frac{dT}{dr} = 0 ; \text{ cuando: } r = 0 \dots\dots\dots (3.21)$$

$$-K \frac{dT}{dr} = h(T_R - T_W); \text{ cuando: } r = R \dots\dots\dots (3.22)$$

Es decir, con las condiciones de frontera siguientes:

$$T(r, t = 0) = 20,152^\circ\text{C}$$

$$T(r = R, t) = 70^\circ\text{C}$$

Por lo tanto, la solución por diferencias finitas de las derivadas parciales de la ecuación (3.19) según (Ozilgen 2011) son:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{(i+1,j)} - 2T_{(i,j)} + T_{(i-1,j)}}{\Delta r^2} \dots\dots\dots (3.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{(i+1,j)} - T_{(i-1,j)}}{2\Delta r} \dots\dots\dots (3.24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{(i,j+1)} - T_{(i,j)}}{\Delta t} \dots\dots\dots (3.25)$$

Es decir la ecuación (3.19), será:

$$\frac{T_{(i+1,j)} - 2T_{(i,j)} + T_{(i-1,j)}}{\Delta r^2} + \frac{2}{r} \frac{T_{(i+1,j)} - T_{(i-1,j)}}{2\Delta r} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{(i,j+1)} - T_{(i,j)}}{\Delta t} \dots\dots\dots(3.26)$$

Pues para calcular los nodos de la esfera entre el centro y la superficie, según (Ozilgen 2011) será:

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{(i-1,j)} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha\Delta t} - 2 \right) T_{(i,j)} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{(i+1,j)} \right] \dots\dots\dots(3.27)$$

Y para calcular el nodo central de una esfera según, (Özilgen 2011); será:

$$T_{(i,j+1)} = \left(1 - \frac{6\alpha\Delta t}{\Delta r^2} \right) T_{(1,j)} + \frac{6\alpha\Delta t}{\Delta r^2} T_{(2,j)} \dots\dots\dots(3.28)$$

La difusividad térmica (α) para cada corrida del programa fue independiente de la temperatura. Para hacer los resultados más generales en la aplicación, éstos se presentaron en variables dimensionales a través de una gráfica.

Al desarrollar el modelo matemático, se supuso que:

- a. Toda la transferencia de calor dentro de la papa es por conducción.
- b. El volumen de la papa es constante.

- c. No hay transferencia de masa desde o dentro de la papa.
- d. Aunque ocurren cambios físicos o químicos durante el calentamiento son insignificantes en la producción de calor.

3.4.5 Validación del Programa de Simulación

Para la validación, el método experimental se hizo aplicando el método descrito por Muñoz (2002), el cual se realizó usando el sensor térmico para mayor precisión, mientras que con el Programa VisualBasic Excel se aplicó también con igual precisión la ubicación de las posiciones donde se colocó el sensor térmico para obtener los perfiles de temperatura.

Pues con los resultados por el método explícito (hacia adelante) , se realizó la simulación de los valores de temperatura y se aplicó la Prueba MSE (Mean Squared Error) para determinar el error cuadrático medio entre los resultados simulados y los resultados experimentales.

3.5 ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Para poder verificar el ajuste de las curvas experimentales con las curvas simuladas, se aplicó la Suma del Error Medio (MSE), tal como se indica en la ecuación (3.29), el cual consiste en evaluar las diferencias que existen entre las temperaturas reales y simuladas a lo largo del calentamiento.

$$MSE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (X_P - X_e)^2 \dots\dots\dots (3.29)$$

Así mismo, para validar la simulación por diferencias finitas por el método explícito se utilizó el Módulo del porcentaje de desviación (%E), el cual consiste en que tanto se asemeja el valor de temperatura experimental con el valor simulado.

$$\% E = \frac{100}{m} \frac{\sum |X_e - X_p|}{X_e} \dots\dots\dots (3.30)$$

Donde:

X_p = Valor de temperatura predicha (°C)

X_e = Valor de temperatura experimental (°C)

m = Numero de datos de temperatura.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 DIMENSIONES DE LA PAPA

Las mediciones ejecutadas desde un principio se realizaron con minuciosidad y fueron muy importantes para determinar las medidas del contorno de la imagen proyectada sobre el papelógrafo, ya que después se logró determinar la posición, y se colocó el sensor con la penetración requerida de lo cual se obtuvo:

$$\text{Radio de la Papa } (r_e) = 3,8268 \text{ cm} = 0,038268 \text{ m}$$

En la Tabla 3 se muestra las mediciones del radio equivalente (re) de las papas que fueron utilizadas para el experimento del calentamiento en un medio líquido, y en la Tabla 4 se muestra las posiciones y penetración del sensor por cada muestra de papa

Tabla 3: Promedio del radio equivalente (r_e) de tres muestras de papa por cada proyección efectuada sobre el papelógrafo

Radio equivalente (re) de las tres (3) muestras de papa en cada proyección mostrada sobre el papelógrafo (cm)	Promedio del Radio equivalente (re) de las muestras de papa (cm)	Promedio total del Radio equivalente (re) de todas las muestras de papa (cm)
3,850 4,485 4,000	4,112	
3,570 4,465 4,260	4,098	
4,420 3,320 3,335	3,692	3,8268
3,510 3,695 3,660	3,622	
3,345 4,240 3,245	3,610	

Tabla 4: Posiciones y penetración del Sensor por cada muestra de papa

Posición del Sensor por cada muestra de papa	Penetración del Sensor por cada muestra de papa (cm)	Radio equivalente (re) de la papa en cada proyección mostrada sobre el papelógrafo (cm)	Promedio total del Radio equivalente (re) de las posiciones (cm)
1ra. Posición	3,850	3,850	
$1\frac{r}{5} = 1\Delta r = [0,0] = \textit{centro}$	4,485	4,485	
	4,000	4,000	
2da. Posición	2,856	3,570	
$2\frac{r}{5} = 2\Delta r = [0,2]$	3,572	4,465	
	3,408	4,260	
3ra. Posición	2,652	4,420	
$3\frac{r}{5} = 3\Delta r = [0,4]$	1,992	3,320	3,8268
	2,001	3,335	
4ta. Posición	1,404	3,510	
$4\frac{r}{5} = 4\Delta r = [0,6]$	1,478	3,695	
	1,464	3,660	
5ta. Posición	0,669	3,345	
$5\frac{r}{5} = 5\Delta r = [0,8]$	0,848	4,240	
	0,649	3,245	

4.2 DETERMINACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD TÉRMICA (α) DE LA PAPA.

Se obtuvo utilizando el método descrito por Muñoz (2002), donde los datos experimentales obtenidos en el laboratorio fueron los resultados de las dos veces que se hizo el proceso de evaluación, tal como se muestra en el Anexo 6; tomando en cuenta la $T_o = 23^\circ C$ y la linealización de la ecuación (3.7):

$$\text{Log} \left(\frac{T_e - T_o}{T_e - T} \right) = \left(\frac{\alpha}{0,398 r^2} \right) \theta - \text{Log} 1,6$$

$$y = m (x) - b$$

Donde, "m" es la pendiente de la curva determinada en la Figura 4 y Figura 5.

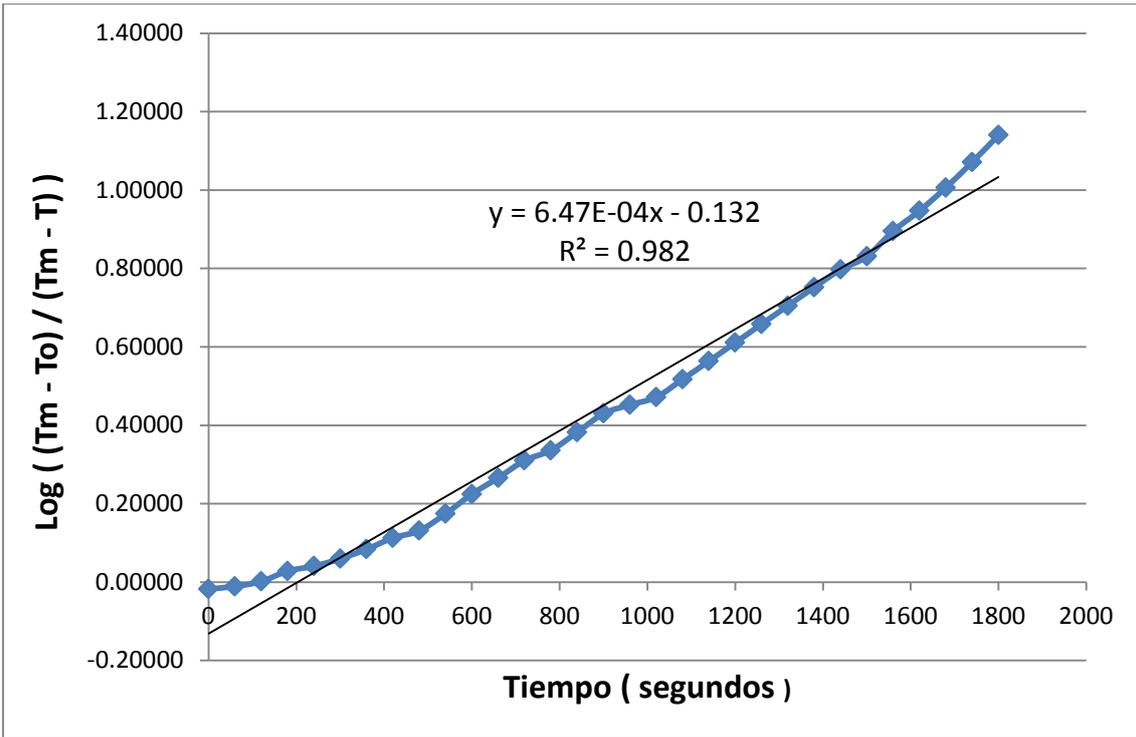


Figura 4: Curva de penetración de calor de la 1ra. Evaluación experimental

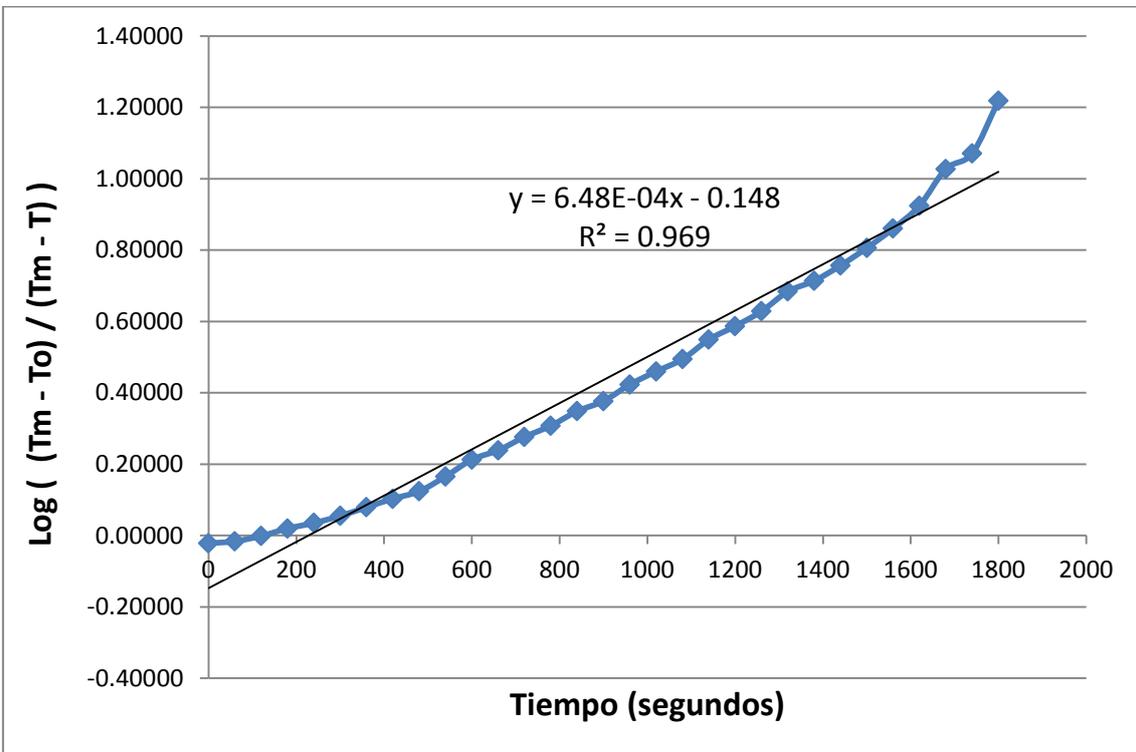


Figura 5: Curva de penetración de calor de la 2da. Evaluación experimental

Se determinó la Difusividad Térmica (α), teniendo en cuenta el radio del equipo de medición de difusividad térmica (r) = 0,024 m y utilizando la ecuación (3.9), tal que la pendiente (m) de la curva de la Figura 4 y Figura 5 fueron de $6,47 \times 10^{-4}$ 1/s y $6,48 \times 10^{-4}$ 1/s ; respectivamente, donde la Difusividad Térmica (α) para ambas curvas de penetración de calor fue $1,48 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$ y $1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$.

De lo cual se observa que dichos resultados obtenidos fueron similares a los datos reportados por Singh y Heldman (2009) de $1,23 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$ y $1,70 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$, así mismo por Vidaurre R.J. (2015) de $1,40 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$ y $1,46 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$.

Al respecto, Farinu y Baik (2007) mencionan que esta variación de los datos se puede deber al estado de madurez, lugar de cosecha y variedad de la materia prima.

4.3 OBTENCIÓN EXPERIMENTAL DE LA TEMPERATURA (T_{ij}) A DIFERENTES POSICIONES EN LA PAPA.

Previamente calibrado el sensor se logró obtener los datos de temperatura al colocarlo por cada posición de la papa y después de haberlo sumergido en el agua a 70°C que contenía el equipo de baño maría, el cual se encontraba agitado con la finalidad de que la transferencia de calor por convección sea la más uniformemente posible y fueron cinco posiciones utilizadas; tales como: 1ra. Posición (0,0), 2da. Posición (0,2), 3ra. Posición (0,4), 4ta. Posición (0,6) y 5ta. Posición (0,8). De los cuales se hicieron 3 réplicas por cada posición.

Cabe recalcar que como cada papa tiene dimensiones diferentes, se trató de buscar que las papas tengan aproximadamente las dimensiones para que aproximadamente el sensor las mismas posiciones en el mismo lugar a pesar que las papas eran diferentes.

Así mismo, se utilizó un sensor por cada papa y por cada posición, es decir para 5 posiciones se utilizaron 5 papas diferentes y como se hicieron 3 réplicas, en total se utilizaron 15 papas.

Por tanto, en el presente trabajo de investigación no se utilizó el método analítico, pues se utilizó el método experimental, ósea el trabajo es de carácter experimental y luego se hizo el modelo simulado utilizando diferencias finitas por el método explícito.

4.3.1 Historial de las temperaturas experimentales en las diferentes posiciones de la papa en los veinte primeros minutos.

En la Tabla 5 y en la Figura 6 se muestran los valores de las temperaturas obtenidas experimentalmente.

Tabla 5: Valores de las temperaturas halladas experimentalmente

i \ j	1 Posición 0,0	2 Posición 0,2	3 Posición 0,4	4 Posición 0,6	5 Posición 0,8	6 Posición 1,0
0,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152
1,0 min	20,629	20,830	22,301	27,893	35,814	70,000
2,0 min	21,247	22,122	25,378	33,385	43,611	70,000
3,0 min	21,943	23,643	28,242	37,336	47,342	70,000
4,0 min	22,920	25,769	31,413	40,980	50,269	70,000
5,0 min	24,123	28,293	34,563	44,158	52,655	70,000
6,0 min	25,464	30,970	37,527	46,897	54,575	70,000
7,0 min	26,952	33,665	40,247	49,241	56,141	70,000
8,0 min	28,596	36,332	42,730	51,275	57,449	70,000
9,0 min	30,354	38,904	44,986	53,022	58,572	70,000
10,0 min	32,173	41,306	47,008	54,546	59,547	70,000
11,0 min	34,019	43,562	48,853	55,911	60,385	70,000
12,0 min	35,883	45,690	50,511	57,129	61,110	70,000
13,0 min	37,688	47,651	52,031	58,193	61,744	70,000
14,0 min	39,458	49,422	53,384	59,133	62,293	70,000
15,0 min	41,176	51,074	54,615	59,969	62,802	70,000
16,0 min	42,820	52,587	55,725	60,717	63,262	70,000
17,0 min	44,392	53,974	56,752	61,391	63,675	70,000
18,0 min	45,877	55,241	57,688	62,023	64,071	70,000
19,0 min	47,298	56,384	58,560	62,579	64,445	70,000
20,0 min	48,644	57,463	59,347	63,086	64,791	70,000

4.3.2 Representación gráfica del historial de temperaturas experimentales en los seis diferentes puntos de la malla (nodos de temperatura)

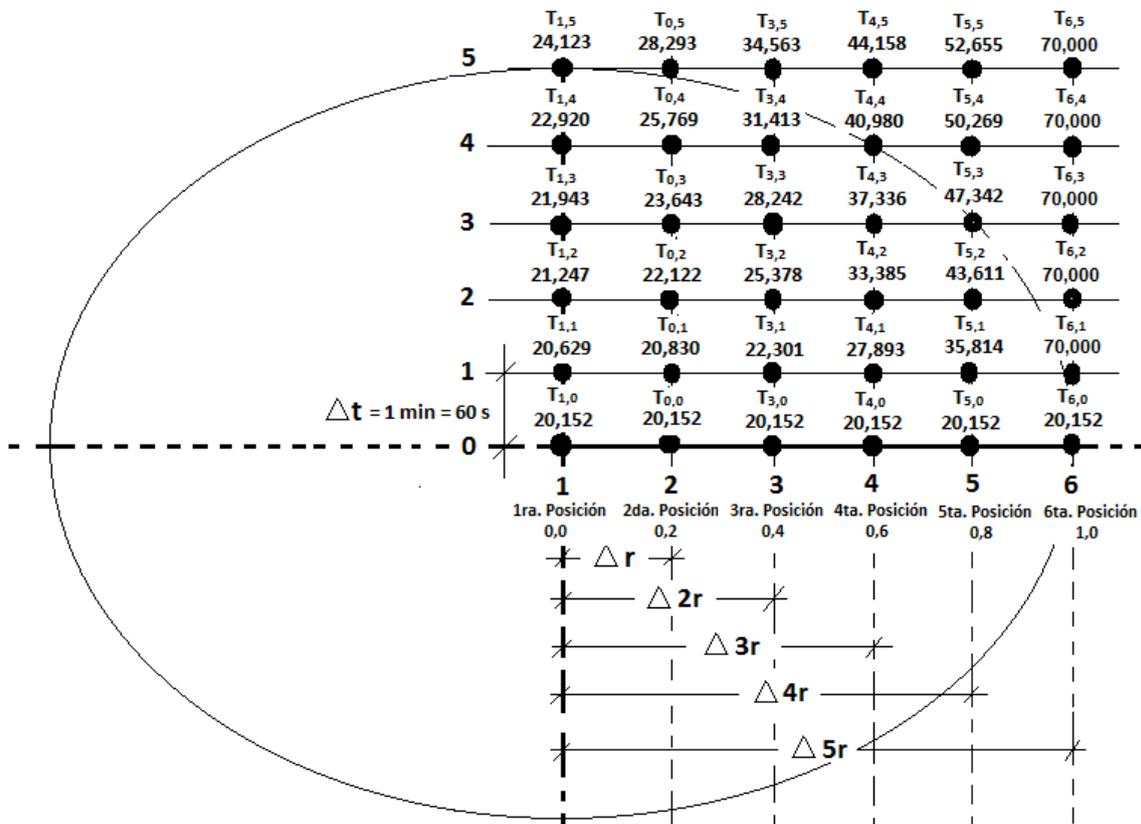


Figura 6: Temperaturas experimentales obtenidas en cada posición del Sensor.

4.3.3 Perfiles de temperatura en cada posición del Sensor

Al realizar estudios de transferencia de calor y masa en el blanqueamiento de papas, Califano y Calvelo (1983) reportó que teniendo en cuenta a la papa como una matriz sólida (almidón, celulosa, sustancias pécticas y algunas proteínas) existe una fuerte disminución de la concentración de azúcares reductores cerca de la superficie de la papa, debido a la difusión de dichos azúcares al blanqueador y que al mismo tiempo en la región central, la concentración aumenta en un 10% con respecto al valor inicial, como consecuencia de la hidrólisis enzimática. Además dice que la transferencia de calor durante el blanqueamiento es más rápida que el transporte de masa durante la mayor parte del tiempo de procesamiento. Así mismo, Farinu y Baik (2007) indica que las propiedades térmicas de los materiales alimenticios también dependen del porcentaje de espacios

vacíos, la forma, el tamaño y la disposición de los espacios vacíos, la homogeneidad y la orientación de las fibras. Del mismo modo, Manrique (2002), señala que al existir una gradiente de temperatura en el medio, la segunda ley de la termodinámica establece que la transferencia de calor se lleva a cabo de la región de mayor temperatura a la de menor, donde el perfil de temperaturas resulta de la temperatura como función de la distancia. Así mismo, los estudios realizados por Agüero *et al.* (2008), en la cinética de inactivación térmica de la peroxidasa y pérdida de vitamina C en láminas de zapallo durante el escaldado en agua a temperaturas de 60°C – 90°C, utilizaron perfil de temperaturas simulados, mediante la solución analítica y descubrieron que el escaldado a temperaturas altas con tiempos cortos, se tuvo como resultado una superior retención de ácido ascórbico y más rápida inactivación enzimática.

Por tanto, mostramos las temperaturas registradas por el sensor por cada minuto, durante los 30 minutos por cada posición en la papa y se representan mediante las siguientes figuras adjuntas desde la Figura 7 a la Figura 11.

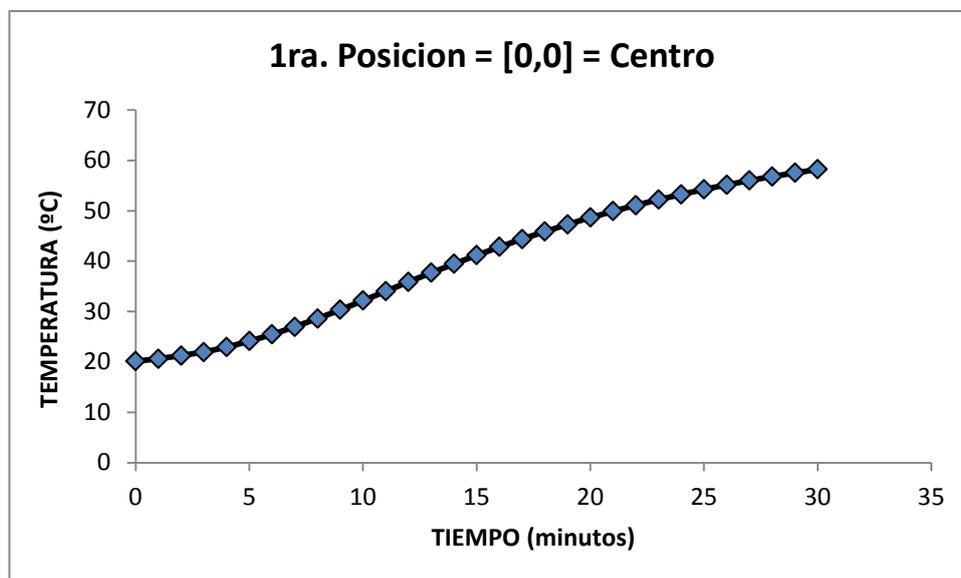


Figura 7: Perfil de temperatura en la 1ra. Posición = [0.0] = Centro

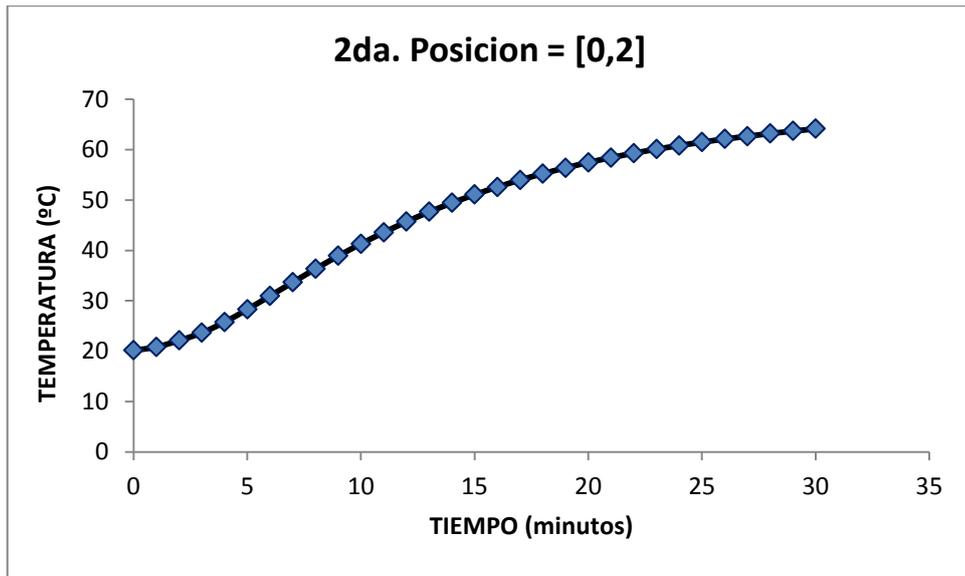


Figura 8: Perfil de temperatura en la 2da. Posición = [0,2]

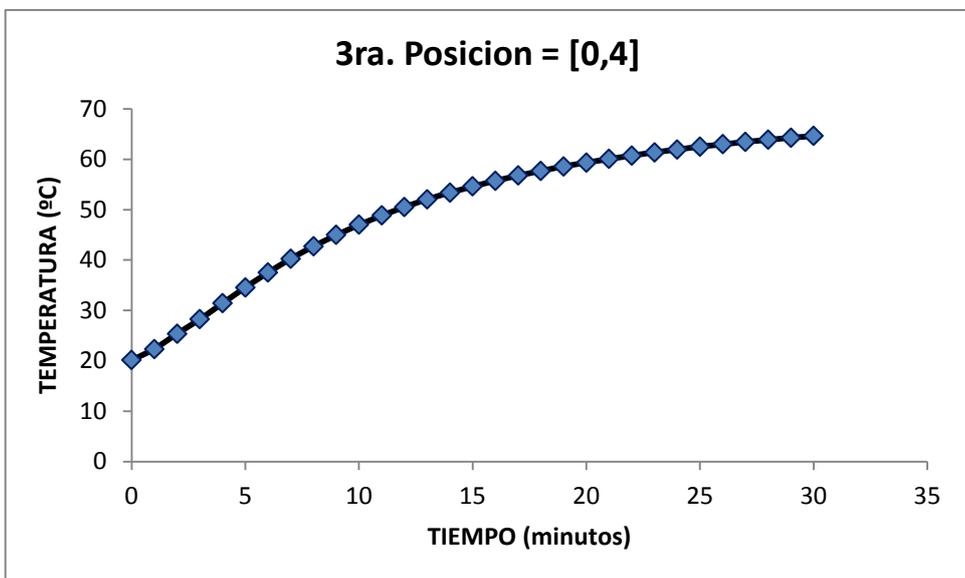


Figura 9: Perfil de temperatura en la 3ra. Posición = [0,4]

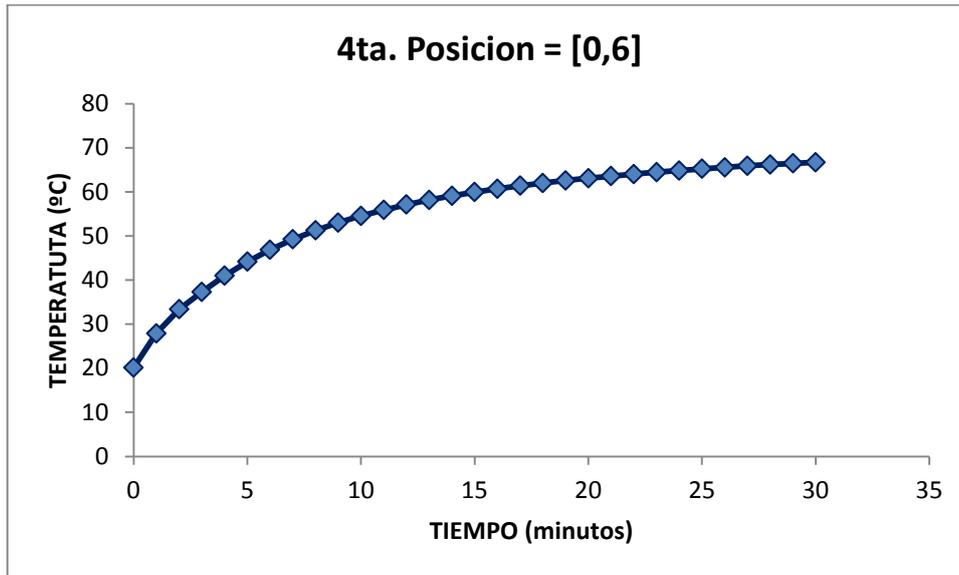


Figura 10: Perfil de temperatura en la 4ta. Posición = [0.6]

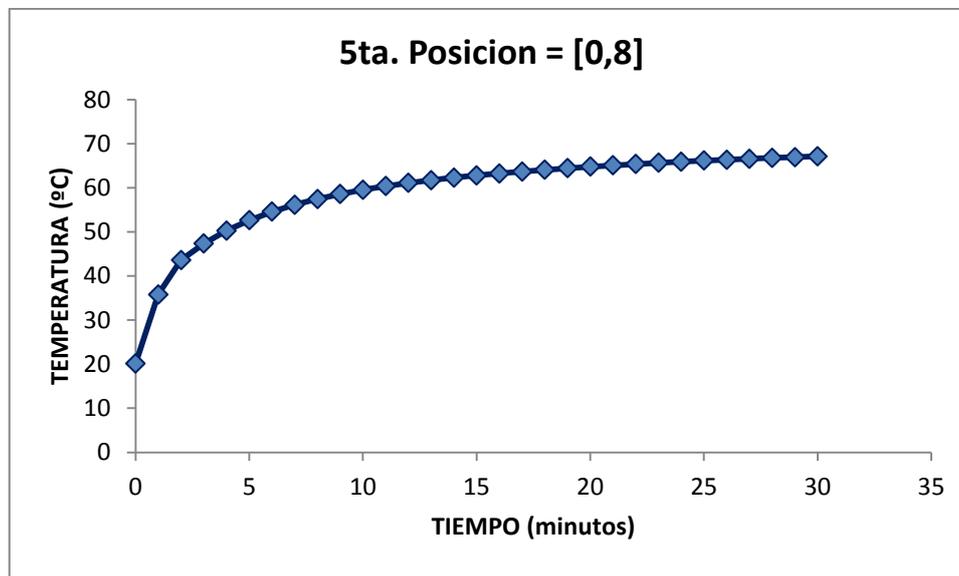


Figura 11: Perfil de temperatura en la 5ta. Posición = [0.8]

4.3.4 Conjunto de curvas de cada posición del Sensor

Durante los estudios realizados de la distribución de temperatura en camote durante el calentamiento por inmersión a través de Wadsworth, y Spadaro (1970), lograron determinar experimentalmente la distribución de la temperatura transitoria para varios tamaños de camote durante el calentamiento por inmersión a 55°C, 70°C, 80°C y 90°C y también fueron calculados la Difusividad Térmica (α) en base a dichas curvas de calentamiento. Así mismo, manifiestan que es muy importante conocer el grado de penetración del calor en el camote para entender los cambios químicos y físicos que ocurren dentro de éste.

Aquí se presenta el conjunto de curvas obtenidas por cada posición del sensor que representa el perfil de temperaturas que fueron registradas cada 30 minutos (Figura 12).

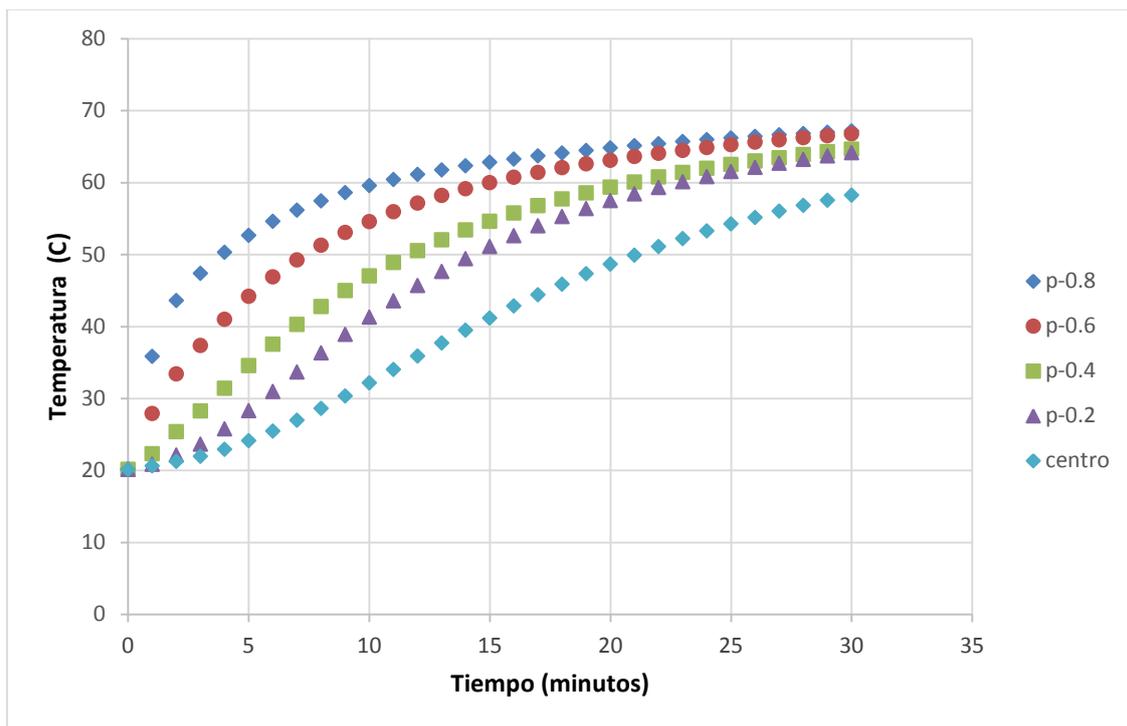


Figura 12: Perfil de temperaturas de cada posición de la papa en donde hay Sensor

4.4 PROGRAMA DE SIMULACIÓN EN VISUALBASIC EXCEL PARA SIMULAR LOS PERFILES DE TEMPERATURA.

Se utilizaron los valores experimentales para determinar la difusividad térmica (α) y usando la ecuación general de transferencia de calor por conducción y aplicando la solución numérica (diferencias finitas), se hizo la programación de estos cálculos en el lenguaje de VisualBasic Excel.

Considerando el reporte de Yanniotis y Sundén (2007) el cual manifiesta que al estudiar el método explícito y el método implícito de diferencia finita, afirma que un esquema explícito simple con una malla moderadamente fina e incrementos de pasos (tiempo) puede proporcionar soluciones altamente confiables y precisas. Durante los estudios realizados por Loss *et al.* (2011) en la utilización de diferencias finitas para la transferencia de calor durante el secado de partículas de papaya, reporta que los experimentos realizados lograron demostrar que los resultados numéricos estuvieron en buen acuerdo con los datos experimentales, donde el método explícito dio resultados más cercanos al experimento que los obtenidos por el método de Crank-Nicolson para todas las muestras estudiadas. También, nos hace mención Ibarz y Barboza (2005) que la conducción bidimensional de calor es conveniente expresarla en forma de diferencias finitas y para su resolución se aplican métodos analíticos o métodos numéricos. Pues para ello se parcela el sólido y los nudos resultantes de la parcelación se indican según la dirección “ x ” por el subíndice i y en la dirección “ y ” por el subíndice j , donde la temperatura de los nudos que rodean a uno cualquiera puede expresarse en función de éste.

Lamberg y Hallstrom (1986) lograron simular perfiles de temperatura y coeficientes de transferencia de calor al realizar el escaldado de cilindros de papas con 6 cm de diámetro por 8 cm de espesor a 75°C, logrando encontrar una buena correlación entre los datos simulados y los datos experimentales, cuando el coeficiente de transferencia de calor es de 750 W/m² °C.

Se logró comprobar que el programa elaborado en VisualBasic Excel para simular las temperaturas mediante la transferencia de calor por diferencias finitas y por el Método Explícito (Hacia Adelante) resultó ser estable y convergente, la cual fue válida con la solución numérica. Dichos resultados concuerdan con Vidaurre (2015) que modeló en papa

y loche, la ecuación de difusión de calor en coordenadas cartesianas en tres dimensiones (3D), mediante el método analítico y el método numérico de diferencias finitas explícitas.

En el Anexo 2 se presenta la codificación de la programación obtenida para la simulación de los perfiles de temperatura. Que al hacer correr dicho Programa de Simulación, muestra una ventana con las temperaturas presentes en la papa; según la posición del sensor tal como se muestra en la Figura 13.

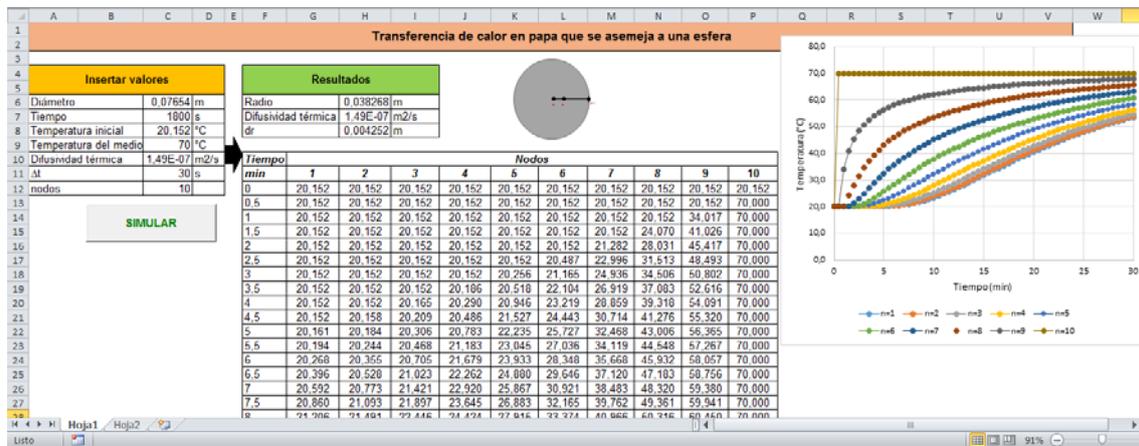


Figura 13: Visualización de las temperaturas en el Programa de Simulación

Una vez lograda su compilación, se verificó la información arrojada para realizar las correcciones requeridas y para finalizar el trabajo de investigación, se creó la interfaz gráfica del programa basándose en información consultada en trabajos del área generándose de esta manera una interfaz que puede ser modificada teniendo en cuenta los cálculos asociados a las variables que la conforman. Finalmente, se desarrolló la interfaz del cálculo de los diferentes puntos de la malla (nodos de temperatura) y luego se dispuso de una sección de gráficos de curvas experimentales y simuladas para visualización de la malla.

Con respecto a la elaboración del programa de simulación, (Franceschi *et al.* 2014), afirma que al desarrollar un software para la solución de problemas de conducción de calor a través del método de elementos finitos resultó ser de aplicación didáctica, donde primeramente se realiza una investigación de los modelos matemáticos para la transferencia de calor y luego el algoritmo necesario para resolver tales modelos.

4.5 VALIDACIÓN DEL PROGRAMA DE SIMULACIÓN

Los estudios realizados por (Ben-lalli *et al.* 2012), en el modelado de transferencia de calor en dátiles para su desinfección y control de insectos, reporta que al realizar la validación térmica en las simulaciones de temperatura con temperaturas experimentales, donde ambas fueron medidas en tres compartimentos (superficie de pulpa, centro de la pulpa y capa de aire) mediante calentamiento por aire a 70°C, logrando demostrar que las temperaturas simuladas eran más menores que las temperaturas experimentales medidas. Así mismo, manifiesta que las simulaciones proporcionaron resultados con una magnitud realista e información sobre las variaciones de la tasa de supervivencia de los insectos (larvas y huevos) mediante las variaciones en las condiciones de tratamiento térmico. Para la validación de los resultados simulados con los valores experimentales, se comparó el perfil de temperaturas simulado con el perfil de temperatura experimental en diferentes posiciones según el Anexo 05 y tal como se muestran desde la Figura 15 a la Figura 19. Se comprobó que existe semejanza (similitud) con un nivel de error en la simulación entre 1,37% y 7,83% al comparar las temperaturas obtenidas analíticamente y las temperaturas obtenidas con el Programa de Simulación en VisualBasic en Excel, donde se encontró que la temperatura central experimental se fijó adecuadamente con el centro de la papa y así sucesivamente con los demás puntos experimentales hasta el Nodo 9; respectivamente, tal como se muestra en la Figura 20.

Los resultados de la simulación de la transferencia de calor utilizando el método de diferencias finitas explícitas, se obtuvo realizando el ingreso de los datos siguientes al Programa de Simulación:

Diámetro de la esfera: 0,07654 m

Temperatura inicial: 20,152 °C

Temperatura del medio: 70°C

Difusividad térmica: $1,49 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

$\Delta t = 30 \text{ s}$

Número de nodos: 10

Tiempo total de calentamiento: 1800 s

La validación se llevó a cabo mediante la comparación con ejemplos planteados en la bibliografía, identificando las desviaciones y corrigiendo los errores detectados que disminuyeron el porcentaje de desviación de los valores de temperaturas obtenidos por el programa y los reportados en la bibliografía.

Tabla 6: Resultados de la simulación de la transferencia de calor para una esfera con diámetro (ϕ) = 0,07654 m, sometida a calentamiento en un medio líquido.

Tiempo (minutos)	Nodos									
	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
0	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152
0,5	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	70,000
1	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	34,017	70,000
1,5	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	24,070	41,026	70,000
2	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	21,282	28,031	45,417	70,000
2,5	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,487	22,996	31,513	48,493	70,000
3	20,152	20,152	20,152	20,152	20,256	21,165	24,936	34,506	50,802	70,000
3,5	20,152	20,152	20,152	20,186	20,518	22,104	26,919	37,083	52,616	70,000
4	20,152	20,152	20,165	20,290	20,946	23,219	28,859	39,318	54,091	70,000
4,5	20,152	20,158	20,209	20,486	21,527	24,443	30,714	41,276	55,320	70,000
5	20,161	20,184	20,306	20,783	22,235	25,727	32,468	43,006	56,365	70,000
5,5	20,194	20,244	20,468	21,183	23,045	27,036	34,119	44,548	57,267	70,000
6	20,268	20,355	20,705	21,679	23,933	28,348	35,668	45,932	58,057	70,000
6,5	20,396	20,528	21,023	22,262	24,880	29,646	37,120	47,183	58,756	70,000
7	20,592	20,773	21,421	22,920	25,867	30,921	38,483	48,320	59,380	70,000
7,5	20,860	21,093	21,897	23,645	26,883	32,165	39,762	49,361	59,941	70,000
8	21,206	21,491	22,446	24,424	27,915	33,374	40,966	50,316	60,450	70,000
8,5	21,628	21,963	23,061	25,249	28,955	34,547	42,099	51,198	60,914	70,000
9	22,125	22,506	23,737	26,110	29,996	35,681	43,167	52,015	61,339	70,000
9,5	22,691	23,115	24,465	27,000	31,032	36,778	44,177	52,775	61,731	70,000
10	23,320	23,782	25,238	27,911	32,060	37,837	45,133	53,483	62,093	70,000
10,5	24,006	24,502	26,050	28,838	33,076	38,859	46,038	54,147	62,430	70,000
11	24,742	25,267	26,893	29,776	34,077	39,845	46,898	54,769	62,744	70,000
11,5	25,521	26,071	27,761	30,719	35,062	40,797	47,715	55,354	63,037	70,000
12	26,337	26,907	28,649	31,663	36,029	41,715	48,493	55,906	63,311	70,000
12,5	27,182	27,768	29,551	32,605	36,977	42,601	49,235	56,428	63,570	70,000
13	28,051	28,650	30,464	33,543	37,904	43,457	49,943	56,921	63,813	70,000
13,5	28,939	29,547	31,381	34,473	38,812	44,283	50,619	57,390	64,043	70,000
14	29,840	30,454	32,301	35,394	39,698	45,081	51,267	57,835	64,261	70,000
14,5	30,751	31,367	33,220	36,303	40,564	45,851	51,887	58,259	64,467	70,000
15	31,666	32,283	34,134	37,199	41,408	46,596	52,481	58,663	64,663	70,000
15,5	32,582	33,199	35,042	38,081	42,231	47,316	53,052	59,048	64,849	70,000
16	33,497	34,110	35,941	38,948	43,033	48,012	53,600	59,417	65,027	70,000

16,5	34,407	35,016	36,830	39,799	43,814	48,685	54,126	59,769	65,196	70,000
17	35,310	35,913	37,707	40,633	44,575	49,336	54,633	60,107	65,358	70,000
17,5	36,204	36,800	38,571	41,450	45,316	49,966	55,120	60,431	65,513	70,000
18	37,088	37,676	39,420	42,250	46,036	50,575	55,590	60,741	65,662	70,000
18,5	37,960	38,538	40,254	43,032	46,737	51,165	56,043	61,040	65,804	70,000
19	38,818	39,386	41,072	43,795	47,418	51,737	56,479	61,327	65,940	70,000
19,5	39,661	40,220	41,873	44,541	48,081	52,290	56,900	61,603	66,072	70,000
20	40,490	41,037	42,658	45,268	48,725	52,825	57,307	61,869	66,198	70,000
20,5	41,302	41,839	43,426	45,978	49,351	53,344	57,700	62,125	66,319	70,000
21	42,098	42,624	44,176	46,669	49,960	53,846	58,079	62,372	66,436	70,000
21,5	42,878	43,391	44,909	47,343	50,551	54,333	58,445	62,611	66,548	70,000
22	43,640	44,142	45,624	47,999	51,125	54,805	58,800	62,840	66,656	70,000
22,5	44,384	44,875	46,322	48,638	51,683	55,262	59,142	63,062	66,761	70,000
23	45,112	45,590	47,002	49,260	52,224	55,705	59,474	63,277	66,862	70,000
23,5	45,821	46,288	47,665	49,865	52,751	56,135	59,794	63,484	66,959	70,000
24	46,514	46,969	48,311	50,454	53,261	56,551	60,104	63,684	67,053	70,000
24,5	47,189	47,632	48,939	51,026	53,757	56,955	60,405	63,877	67,144	70,000
25	47,847	48,279	49,552	51,582	54,239	57,346	60,696	64,064	67,232	70,000
25,5	48,487	48,908	50,147	52,123	54,707	57,725	60,977	64,245	67,316	70,000
26	49,111	49,521	50,727	52,649	55,161	58,093	61,250	64,421	67,398	70,000
26,5	49,719	50,117	51,291	53,160	55,601	58,450	61,514	64,590	67,478	70,000
27	50,310	50,698	51,839	53,657	56,029	58,795	61,770	64,754	67,555	70,000
27,5	50,885	51,262	52,372	54,139	56,444	59,131	62,018	64,913	67,629	70,000
28	51,444	51,811	52,890	54,608	56,847	59,456	62,258	65,067	67,701	70,000
28,5	51,988	52,345	53,394	55,063	57,238	59,771	62,491	65,216	67,771	70,000
29	52,517	52,863	53,883	55,505	57,618	60,077	62,717	65,360	67,838	70,000
29,5	53,031	53,368	54,358	55,934	57,986	60,374	62,935	65,500	67,903	70,000
30	53,530	53,858	54,820	56,351	58,343	60,661	63,147	65,636	67,967	70,000

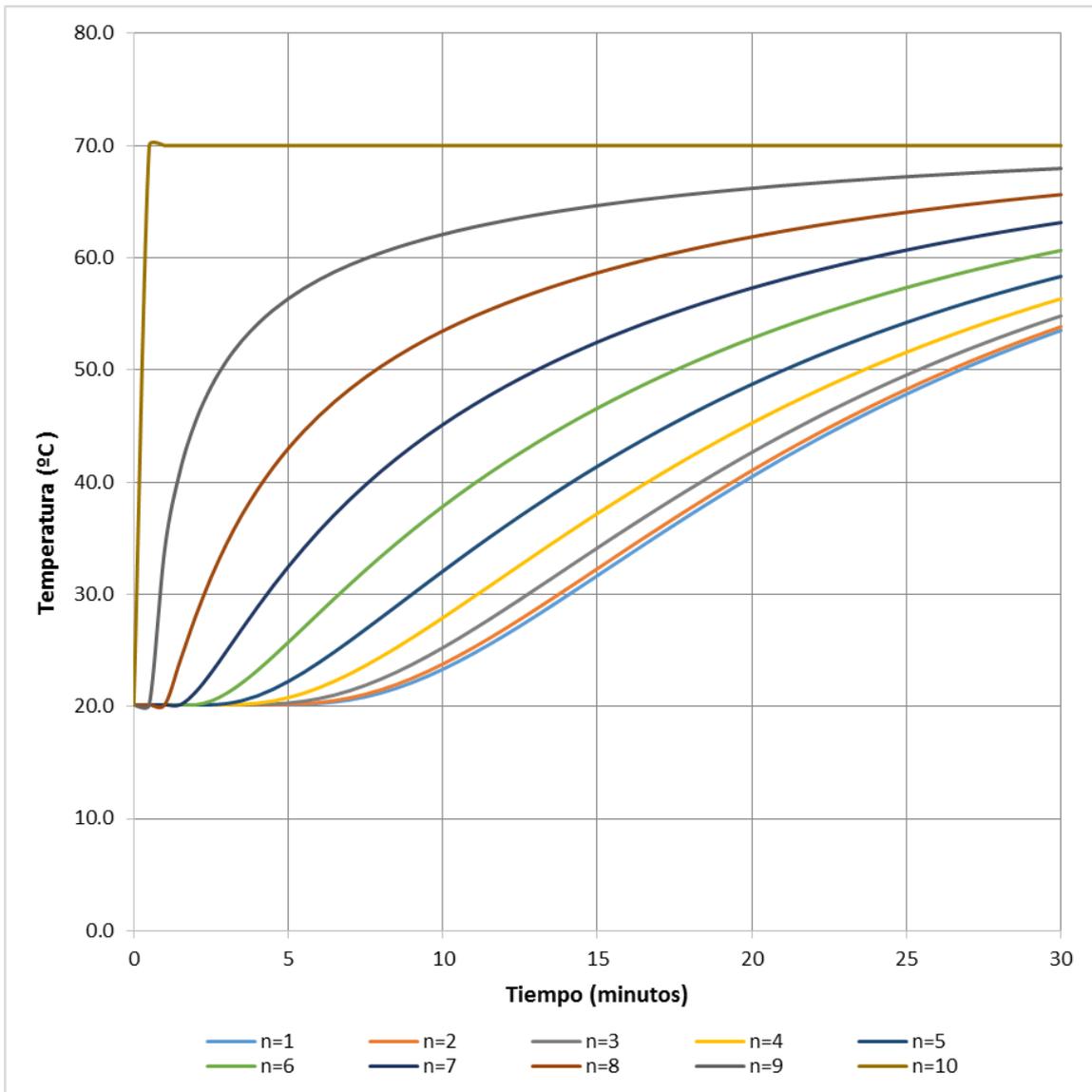


Figura 14: Perfiles de temperatura de los diferentes nodos simulados para la transferencia de calor de una esfera sometida a un medio de calentamiento.

Tabla 7: Comparación de la temperatura simulada (nodo 5) y la temperatura experimental 1.

<i>Tiempo</i>	<i>Exp 1</i>	<i>n=5</i>	<i>(Texp - Tsim)^2</i>
0	20,152	20,152	0,00
1	20,629	20,152	0,23
2	21,247	20,152	1,20
3	21,943	20,256	2,85
4	22,920	20,946	3,90
5	24,123	22,235	3,56
6	25,464	23,933	2,34
7	26,952	25,867	1,18
8	28,596	27,915	0,46
9	30,354	29,996	0,13
10	32,173	32,060	0,01
11	34,019	34,077	0,00
12	35,883	36,029	0,02
13	37,688	37,904	0,05
14	39,458	39,698	0,06
15	41,176	41,408	0,05
16	42,820	43,033	0,05
17	44,392	44,575	0,03
18	45,877	46,036	0,03
19	47,298	47,418	0,01
20	48,644	48,725	0,01
21	49,913	49,960	0,00
22	51,093	51,125	0,00
23	52,214	52,224	0,00
24	53,259	53,261	0,00
25	54,231	54,239	0,00
26	55,146	55,161	0,00
27	56,003	56,029	0,00
28	56,790	56,847	0,00
29	57,539	57,618	0,01
30	58,226	58,343	0,01

MSE	0,5	°C
-----	-----	----

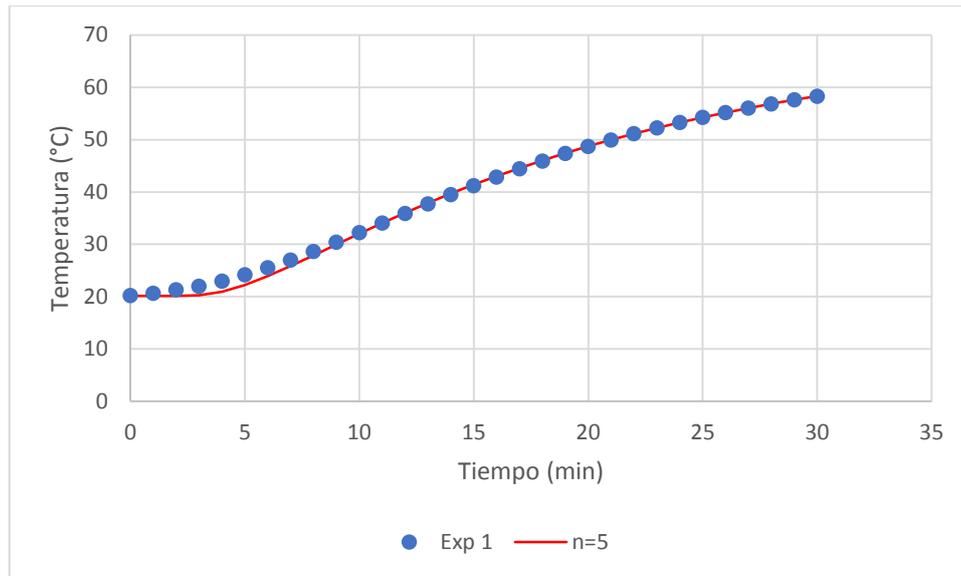


Figura 15: Perfil de temperatura simulada y temperatura experimental en el punto 1.

Tabla 8: Comparación de la temperatura simulada (nodo 6) y la temperatura experimental 2.

Tiempo	Exp 2	n=6	(Texp - Tsim)^2
0	20,152	20,152	0,00
1	20,830	20,152	0,46
2	22,122	20,152	3,88
3	23,643	21,165	6,14
4	25,769	23,219	6,50
5	28,293	25,727	6,59
6	30,970	28,348	6,87
7	33,665	30,921	7,53
8	36,332	33,374	8,75
9	38,904	35,681	10,39
10	41,306	37,837	12,04
11	43,562	39,845	13,82
12	45,690	41,715	15,80
13	47,651	43,457	17,59
14	49,422	45,081	18,85
15	51,074	46,596	20,05
16	52,587	48,012	20,93
17	53,974	49,336	21,51
18	55,241	50,575	21,77

19	56,384	51,737	21,60
20	57,463	52,825	21,51
21	58,416	53,846	20,88
22	59,303	54,805	20,23
23	60,101	55,705	19,32
24	60,813	56,551	18,16
25	61,495	57,346	17,22
26	62,106	58,093	16,10
27	62,660	58,795	14,94
28	63,199	59,456	14,01
29	63,682	60,077	13,00
30	64,136	60,661	12,07

MSE 13,8 °C

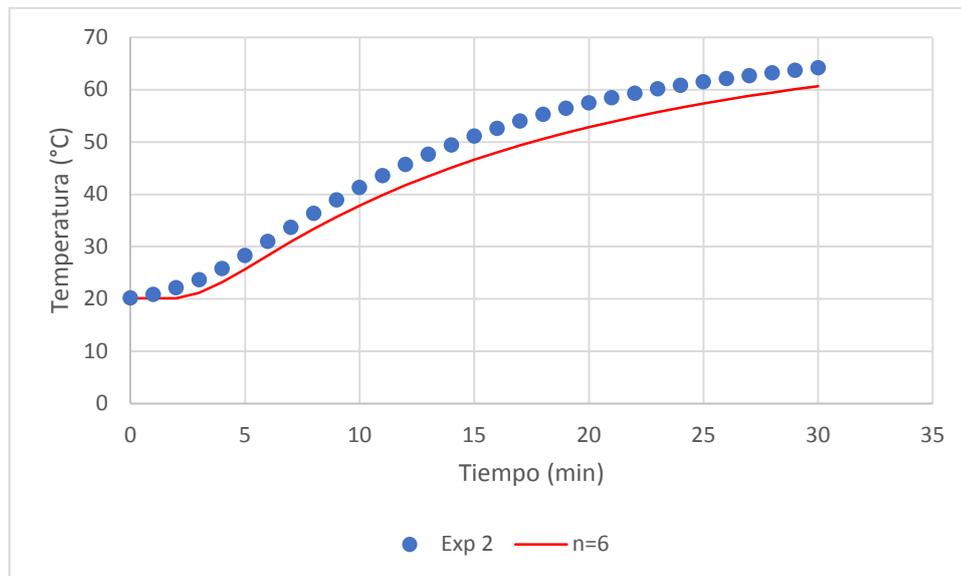


Figura 16: Perfil de temperatura simulada y temperatura experimental en el punto 2.

Tabla 9: Comparación de la temperatura simulada (nodo 7) y la temperatura experimental 3.

<i>Tiempo</i>	<i>Exp 3</i>	<i>n=7</i>	<i>(Texp - Tsim)^2</i>
0	20,152	20,152	0,00
1	22,301	20,152	4,62
2	25,378	21,282	16,78
3	28,242	24,936	10,93
4	31,413	28,859	6,52
5	34,563	32,468	4,39
6	37,527	35,668	3,46
7	40,247	38,483	3,11
8	42,730	40,966	3,11
9	44,986	43,167	3,31
10	47,008	45,133	3,52
11	48,853	46,898	3,82
12	50,511	48,493	4,07
13	52,031	49,943	4,36
14	53,384	51,267	4,48
15	54,615	52,481	4,55
16	55,725	53,600	4,52
17	56,752	54,633	4,49
18	57,688	55,590	4,40
19	58,560	56,479	4,33
20	59,347	57,307	4,16
21	60,067	58,079	3,95
22	60,743	58,800	3,78
23	61,366	59,474	3,58
24	61,941	60,104	3,37
25	62,489	60,696	3,22
26	62,979	61,250	2,99
27	63,440	61,770	2,79
28	63,874	62,258	2,61
29	64,264	62,717	2,39
30	64,615	63,147	2,15

MSE	4,3	°C
-----	-----	----

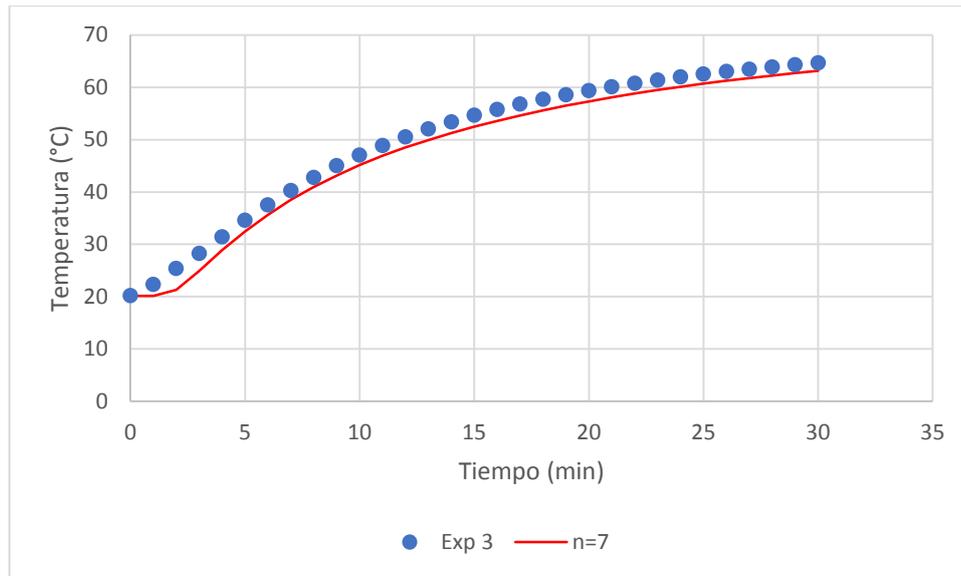


Figura 17: Perfil de temperatura simulada y temperatura experimental en el punto 3.

Tabla 10: Comparación de la temperatura simulada (nodo 8) y la temperatura experimental 4.

<i>Tiempo</i>	<i>Exp 4</i>	<i>n=8</i>	<i>(Texp - Tsim)^2</i>
0	20,152	20,152	0,00
1	27,893	20,152	59,92
2	33,385	28,031	28,67
3	37,336	34,506	8,01
4	40,980	39,318	2,76
5	44,158	43,006	1,33
6	46,897	45,932	0,93
7	49,241	48,320	0,85
8	51,275	50,316	0,92
9	53,022	52,015	1,01
10	54,546	53,483	1,13
11	55,911	54,769	1,30
12	57,129	55,906	1,50
13	58,193	56,921	1,62
14	59,133	57,835	1,68
15	59,969	58,663	1,71
16	60,717	59,417	1,69
17	61,391	60,107	1,65
18	62,023	60,741	1,64

19	62,579	61,327	1,57
20	63,086	61,869	1,48
21	63,585	62,372	1,47
22	64,037	62,840	1,43
23	64,461	63,277	1,40
24	64,858	63,684	1,38
25	65,235	64,064	1,37
26	65,580	64,421	1,34
27	65,912	64,754	1,34
28	66,208	65,067	1,30
29	66,477	65,360	1,25
30	66,732	65,636	1,20

MSE	4,4	°C
-----	-----	----

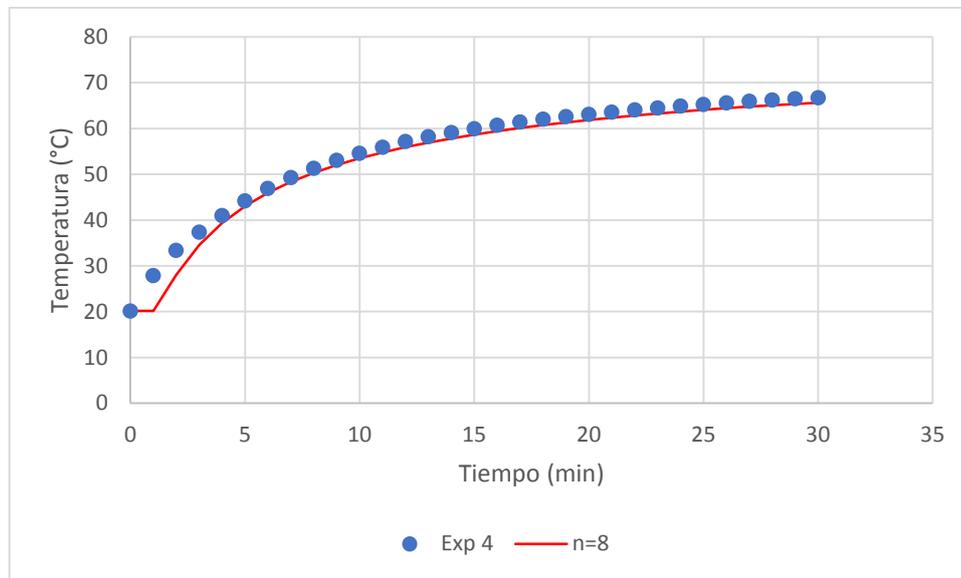


Figura 18: Perfil de temperatura simulada y temperatura experimental en el punto 4.

Tabla 11: Comparación de la temperatura simulada (nodo 9) y la temperatura experimental 5.

<i>Tiempo</i>	<i>Exp 5</i>	<i>n=9</i>	<i>(Texp - Tsim)^2</i>
0	20,152	20,152	0,00
1	35,814	34,017	3,23
2	43,611	45,417	3,26
3	47,342	50,802	11,97
4	50,269	54,091	14,61
5	52,655	56,365	13,76
6	54,575	58,057	12,13
7	56,141	59,380	10,49
8	57,449	60,450	9,01
9	58,572	61,339	7,66
10	59,547	62,093	6,48
11	60,385	62,744	5,56
12	61,110	63,311	4,85
13	61,744	63,813	4,28
14	62,293	64,261	3,87
15	62,802	64,663	3,46
16	63,262	65,027	3,12
17	63,675	65,358	2,83
18	64,071	65,662	2,53
19	64,445	65,940	2,24
20	64,791	66,198	1,98
21	65,103	66,436	1,78
22	65,390	66,656	1,60
23	65,677	66,862	1,40
24	65,930	67,053	1,26
25	66,169	67,232	1,13
26	66,379	67,398	1,04
27	66,592	67,555	0,93
28	66,784	67,701	0,84
29	66,957	67,838	0,78
30	67,147	67,967	0,67

MSE 4,5 °C

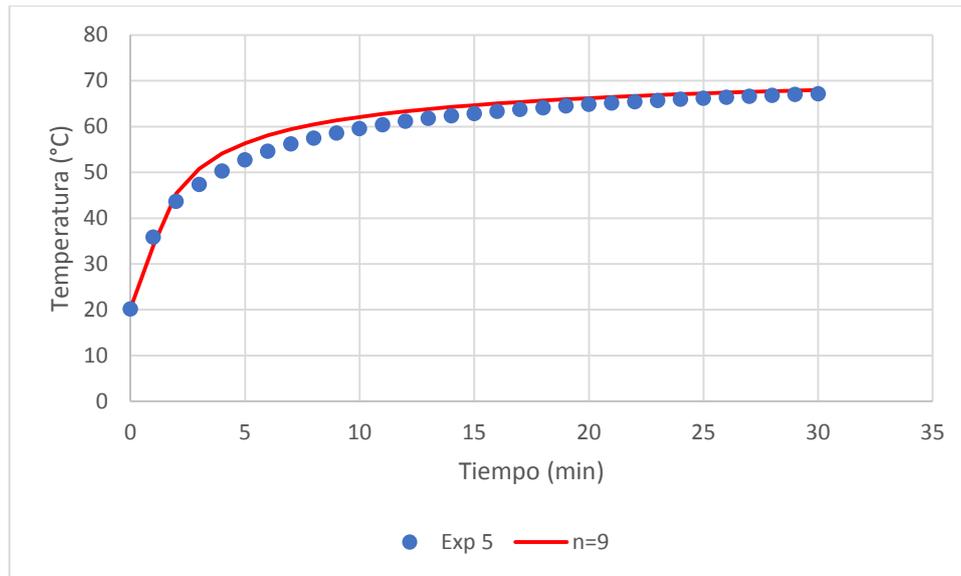


Figura 19: Perfil de temperatura simulada y temperatura experimental en el punto 5.

4.5.1 Comparación del perfil de los resultados experimentales y resultados simulados.

En la investigación realizada por Loss *et al.* (2011), hicieron la comparación de los perfiles de temperatura de los resultados numéricos obtenidos en el centro de la muestra (papaya) con los datos experimentales que fueron realizados en las siguientes condiciones de operación: temperatura (50, 60 y 70°C), velocidad del aire (2 m/s) y dimensiones (1x1x1, 2x2x2 e 3x3x3 cm); logrando obtener una aceptación con dichos datos. Considerando el reporte por Yanniotis y Sundén (2007) indica que los modelos y métodos numéricos ofrecen una herramienta eficiente y poderosa para simular, comprender y experimentar con los procesos de transporte en la Industria Alimentaria. Del mismo modo, los estudios efectuados por Salas *et al.* (2019), reporta que el modelo desarrollado logró simular correctamente el perfil de congelación de papas y ullucus en forma cúbica y con este modelo se evaluaron los posibles efectos del coeficiente de transferencia de calor convectivo (h) con valores bajos de 17 – 27 W/m² °C y valores altos de 295 – 371 W/m² °C, y la temperatura externa en los tiempos de congelación con diferentes posiciones, logrando representar mediante ecuaciones polinómicas que podrían usarse en la industria. Por tanto, según las evidencias se encontró que la temperatura central experimental se fijó adecuadamente con el centro de la papa y así sucesivamente con los demás puntos experimentales hasta el Nodo 9; respectivamente, tal como se muestra en la Figura 20.

Así mismo, al realizar la comparación de los resultados simulados y resultados experimentales, se encontró los grados de temperatura de error en la simulación con el porcentaje de error de desviación y son los siguientes:

- Comparación del Nodo 5 – Experimental 1 que 0,5°C corresponde al 1,37% de error.
- Comparación del Nodo 6 – Experimental 2 que 13,8°C corresponde al 7,83% de error.
- Comparación del Nodo 7 – Experimental 3 que 4,3°C corresponde al 4,64% de error.
- Comparación del Nodo 8 – Experimental 4 que 4,4°C corresponde al 3,55% de error.
- Comparación del Nodo 9 – Experimental 5 que 4,5°C corresponde al 3,09% de error.

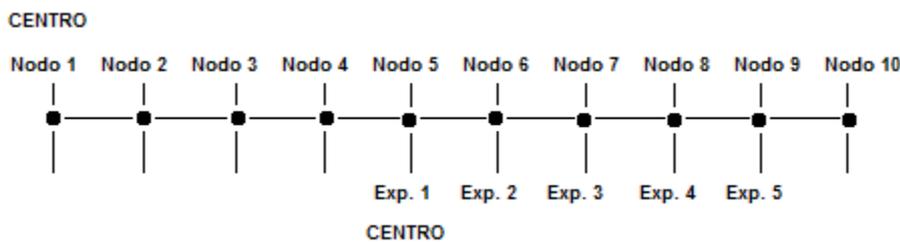


Figura 20: Comparación de los resultados experimentales y resultados simulados

4.5.2 Comparación estadística de los resultados Experimentales VERSUS resultados simulados.

La comparación estadística de temperaturas experimentales y temperaturas simuladas para cada posición del sensor tal como se muestra en la Tabla 12, se utilizó el análisis estadístico, suma del error medio (MSE) y el porcentaje de error (%E), tal como se muestra en la ecuación 3,29 y la ecuación 3,30; respectivamente.

Tal como se esperó que hubo coincidencia entre los resultados experimentales y los resultados simulados, tal como se muestra desde la Figura 15 a la Figura 19.

$$\text{MSE (Nodo 5 – Experimental 1)} = 0,5^{\circ}\text{C}$$

$$\text{MSE (Nodo 6 – Experimental 2)} = 13,8^{\circ}\text{C}$$

$$\text{MSE (Nodo 7 – Experimental 3)} = 4,3^{\circ}\text{C}$$

$$\text{MSE (Nodo 8 – Experimental 4)} = 4,4^{\circ}\text{C}$$

$$\text{MSE (Nodo 9 – Experimental 5)} = 4,5^{\circ}\text{C}$$

$$\%E \text{ (Nodo 5 – Experimental 1)} = 1,37\%$$

$$\%E \text{ (Nodo 6 – Experimental 2)} = 7,83\%$$

%E (Nodo 7 – Experimental 3) = 4,64%

%E (Nodo 8 – Experimental 4) = 3,55%

%E (Nodo 9 – Experimental 5) = 3,09%

Tabla 12: Comparación de temperaturas experimentales y temperaturas simuladas para cada posición del Sensor

Tiempo (minutos)	Exp 1	Nodo n=5	Exp 2	Nodo n=6	Exp 3	Nodo n=7	Exp 4	Nodo n=8	Exp 5	Nodo n=9
0	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152
1	20,629	20,152	20,830	20,152	22,301	20,152	27,893	20,152	35,814	34,017
2	21,247	20,152	22,122	20,152	25,378	21,282	33,385	28,031	43,611	45,417
3	21,943	20,256	23,643	21,165	28,242	24,936	37,336	34,506	47,342	50,802
4	22,920	20,946	25,769	23,219	31,413	28,859	40,980	39,318	50,269	54,091
5	24,123	22,235	28,293	25,727	34,563	32,468	44,158	43,006	52,655	56,365
6	25,464	23,933	30,970	28,348	37,527	35,668	46,897	45,932	54,575	58,057
7	26,952	25,867	33,665	30,921	40,247	38,483	49,241	48,320	56,141	59,380
8	28,596	27,915	36,332	33,374	42,730	40,966	51,275	50,316	57,449	60,450
9	30,354	29,996	38,904	35,681	44,986	43,167	53,022	52,015	58,572	61,339
10	32,173	32,060	41,306	37,837	47,008	45,133	54,546	53,483	59,547	62,093
11	34,019	34,077	43,562	39,845	48,853	46,898	55,911	54,769	60,385	62,744
12	35,883	36,029	45,690	41,715	50,511	48,493	57,129	55,906	61,110	63,311
13	37,688	37,904	47,651	43,457	52,031	49,943	58,193	56,921	61,744	63,813
14	39,458	39,698	49,422	45,081	53,384	51,267	59,133	57,835	62,293	64,261
15	41,176	41,408	51,074	46,596	54,615	52,481	59,969	58,663	62,802	64,663
16	42,820	43,033	52,587	48,012	55,725	53,600	60,717	59,417	63,262	65,027
17	44,392	44,575	53,974	49,336	56,752	54,633	61,391	60,107	63,675	65,358
18	45,877	46,036	55,241	50,575	57,688	55,590	62,023	60,741	64,071	65,662
19	47,298	47,418	56,384	51,737	58,560	56,479	62,579	61,327	64,445	65,940
20	48,644	48,725	57,463	52,825	59,347	57,307	63,086	61,869	64,791	66,198
21	49,913	49,960	58,416	53,846	60,067	58,079	63,585	62,372	65,103	66,436
22	51,093	51,125	59,303	54,805	60,743	58,800	64,037	62,840	65,390	66,656
23	52,214	52,224	60,101	55,705	61,366	59,474	64,461	63,277	65,677	66,862
24	53,259	53,261	60,813	56,551	61,941	60,104	64,858	63,684	65,930	67,053
25	54,231	54,239	61,495	57,346	62,489	60,696	65,235	64,064	66,169	67,232
26	55,146	55,161	62,106	58,093	62,979	61,250	65,580	64,421	66,379	67,398
27	56,003	56,029	62,660	58,795	63,440	61,770	65,912	64,754	66,592	67,555
28	56,790	56,847	63,199	59,456	63,874	62,258	66,208	65,067	66,784	67,701
29	57,539	57,618	63,682	60,077	64,264	62,717	66,477	65,360	66,957	67,838
30	58,226	58,343	64,136	60,661	64,615	63,147	66,732	65,636	67,147	67,967

Cuando se comparó el perfil de temperaturas simulado con el perfil de temperatura experimental en diferentes posiciones se encontró que la temperatura central experimental se fijó adecuadamente con el centro de la papa y así sucesivamente con los demás puntos experimentales hasta el nodo 9; respectivamente, con un nivel de error en la simulación entre 1,37% y 7,83%.

V. CONCLUSIONES

1. Los valores de la difusividad térmica (α) de la papa fueron de $1,48 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ y $1,49 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ que fueron obtenidos experimentalmente se encuentran dentro del rango establecido por muchos investigadores.
2. El modelamiento de la temperatura se realizó mediante diferencias finitas utilizando el Método de diferencias finitas (hacia adelante) y se logró obtener las distintas temperaturas que se encuentran distribuidas internamente en la papa durante el calentamiento en el medio líquido. Se logró elaborar el programa utilizando el lenguaje VisualBasic Excel para simular la determinación de la temperatura mediante la transferencia de calor por el método diferencias finitas, logrando comprobar que la simulación numérica fue estable y convergente.
- 3.- Las temperaturas obtenidas con el Programa de Simulación en VisualBasic Excel no presentaron diferencias estadísticas significativas respecto a las temperaturas obtenidas experimentalmente. Para la validación de los valores experimentales con los valores simulados, se comparó el perfil de temperaturas simulado con el perfil de temperatura experimental en diferentes posiciones y se registró que la temperatura central experimental se fijó perfectamente con el nodo 5 y así sucesivamente con los demás puntos experimentales hasta el nodo 9.
4. En la validación de los valores experimentales con los valores simulados se encontró que existe un nivel de error en la simulación entre 1,37% y 7,83%.

VI. RECOMENDACIONES

1. Utilizar Sensores de Temperatura por Resistencia (termistores) para registrar con más precisión las temperaturas en el punto central de la papa.
2. Determinar las propiedades térmicas de los alimentos, con instrumentos más precisos y modernos para obtener los datos correctos con la precisión debida para correctas simulaciones.
3. Aperturar nuevos trabajos de investigación como la determinación de la difusividad térmica y el modelamiento de la temperatura para hacer el escalamiento en planta procesadoras de Alimentos.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agüero, M; Ansorena, M; Roura, S; del Valle, C. 2008. Thermal inactivation of peroxidase during blanching of butternut squash. *LWT – Food Science and Technology*. 41(3): 401 – 407.
- Ansari, F.A. 1998. Finite difference solution of heat and mass transfer problems related to precooling of food. *Energy Conversion & Management*, 40: 795-802.
- Avila, A.E. 2003. La papa en el mundo. Colectividad peruana. Argentina. Biblioteca virtual.
- Baik, O.D; Sablani, S.S; Marcotte, M; Castaigne, F. 1999. Modeling the Thermal Properties of a Cup Cake During Baking. *Journal of Food Science*, 64: 295-299
- Ben-lalli, A; Bohuon, P; Collignan, A; Méot, J. 2012. Modeling heat transfer for disinfestation and control of insects (larvae and eggs) in date fruits. *Journal of Food Engineering* 116(2013) 505 - 514.
- Califano, A.N; Calvelo, A. 1983. Heat and Mass Transfer During the Warm Water Blanching of Potatoes. *Journal of Food Science*. Vol. 48 (1983).
- Calzada, B.J. 1970. Métodos estadísticos para la investigación. 3ra. Edición. Editorial Jurídica S.A. Lima, Perú.
- Calienses, P.C. 2000. Determinación de la difusividades térmicas reales de alimentos porosos. Tesis para optar el grado de Magíster Scientae. Tecnología de los Alimentos. UNALM. Lima, Perú.
- Cernuschi, F; Bison, G; Figari, A; Merinetti, S; Grinzato, E. 2004. Thermal diffusivity measurements by photothermal and thermographic techniques. *International Journal of Thermophysics*. 25, 439–457.

- Costa, R. M; Oliveira, F.A.R; Delaney, O. 1999. Analysis of heat transfer coefficient during potato frying. *Journal of Food Engineering*, 39(3):293-299.
- Choi, Y; Okos, M.R. 1986. Effects of temperature and composition on the thermal properties of foods. En: *Food Engineering and Process Applications*, Vol. 1, Transport Phenomena, Le Maguer, M. and Jelen, P., eds., Elsevier Applied Science, London.
- DATAPAQ LTD. 2012. Perfilado térmico en procesamiento de alimentos. <http://www.datapaq.com/Datapaq/es-r0/IndustryApplications/Food+Processing/Default.htm?trck=flashfoodes>
- Datta, A.K; Rattray, J. 1998. Food Process Modeling. Vol. IV. *Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS)*.
- Drusas, A.E; Saravacos G.D. 1985. Thermal Conductivity of Tomato Paste. *Journal of Food Engineering*. 4:157 – 168.
- Erdogdu, F. 2005. Mathematical approaches for use of analytical solutions in experimental determination of heat and mass transfer parameters. *Journal of Food Engineering*. 68: 233-238.
- Erdogdu, F; Linke, M; Praeger, U; Geyer, M; Schlüter, O. 2014. Experimental determination of thermal conductivity and thermal diffusivity of whole green (unripe) and yellow (ripe) Cavendish bananas under cooling conditions. *Journal of Food Engineering*. 128: 46-52
- FAO. 2008. Año Internacional de la papa: La papa en el mundo. Traductor: Brun, M.T. Oficina de la ONU.
- Farinu, A; Baik, O. 2007. Thermal Properties of Sweet potato with its Moisture Content and Temperature. *International Journal of Food Properties*. IO:703-719
- Fellows, P. 1994. *Tecnología del procesado de los Alimentos: Principios y Prácticas*. Editorial Acribia. Zaragoza, España.
- Figura, L.O – Teixeira, A.O. 2007. *Food Physics – Physical Properties, Measurement and Applications*. Springer Berlin Heidelberg New York

- Franceschi, K; Rodríguez, W; Acosta, B. 2014. Desarrollo de un software para la solución de problemas de conducción de calor a través del método de elementos finitos. Universidad de Carabobo. Revista Ingeniería UC. Vol. 21 Pag. 76-82
- Geankoplis C.J. 2007. Procesos de transporte y operaciones unitarias. Editorial Continental-México. Novena Impresión.
- Hermida, B.J. 2000. Fundamentos de Ingeniería de procesos agroalimentarios. Ediciones Mundi-Prensa, España. 1ra. Edición.
- Herrera, D.L. 2005. Procesos de transferencia de calor.
<http://www.utadeo.edu.co/dependencias/publicaciones/alimentica2/libro4a.pdf>
- Holman, J.P. 1999. Transferencia de Calor. Editorial continental, México. Decima reimpresión.
- Holdsworth, D; Simpson, R. 2007. Thermal processing of packaged food. 2da. Edición. Springer. Nueva York, USA.
- Inzunza, B.J. 2010. Mecanismos de transferencia de calor. Universidad de Concepción. DGEO. Chile
- Ibarz, A; Barboza, C. 2005. Operaciones Unitarias en la Ingeniería de Alimentos. Ediciones Mundi – Prensa. Madrid, España.
- INEI. 2014. Ministerio de Agricultura y Riego. N°082. Mayo 2014
- Jaruk, S. y John, S. R. 2007. Predicting moisture profiles in potato and carrot during convective hot air drying using isothermally measured effective diffusivity. Journal of Food Engineering. Vol. 84. Pag. 516–525.
- Lamberg, I; Hallstrom, B. 1986. Thermal properties of potatoes and a computer simulation model of a blanching process. Food Technology. 21, 577
- Lewis, M.J. 1993. Propiedades físicas de los alimentos y de los sistemas de procesado. Editorial Acribia S.A. Zaragoza, España.
- Loncin, M. 1991. Génie Industriel Alimentaire. Aspects Fondamentaux. Masson. Pag. 50 – 51, 276 – 277

- Loss, R.D; Santos, I.P; Muniz, E.P; Proveti, J.R; Porto, P.S. 2011. Finite difference solutions for heat transfer during drying of cubic papaya particles. SciVerse ScienceDirect. Procedia Food Science 1(2001) 753 – 761. Elsevier Food Science, London.
- Manrique, V.J. 2002. Transferencia de calor. Editoriales Gráficas - México. Segunda edición.
- Método AOAC. 1995. Oficial Methods of Análisis. 16 Edition. Association of Official Analytical Chemist. Arlington, Va, USA.
- Montgomery, D.C. 1991. Diseño y análisis de experimentos. Grupo Editorial Iberoamérica. México, D.F.
- Mohsenin, N. 1980. Thermal Properties of Foods and Agricultural Materials, Gordon and Breach Science Publishers Inc., New York.
- Muñoz, V.J.C. 2002. Determinación de la difusividad térmica en pasta de Murta (*Ugni molinae Turcz*) en función de la temperatura. Tesis para optar el Grado de Licenciado en Ingeniería de Alimentos. Universidad Austral de Chile.
- Ozilgen, M. 2011. Handbook of Food Process Modeling and Statistical Quality Control. 2da. Edición. Taylor Francis Group. New York
- Ozisik, N. 1993. Heat Conduction. John Wiley and Sons, Inc. New York. 2da. Edicion. Department of Mechanical and Aerospace Engineering. North Carolina State University.
- Pons Muzzo, G. 1975. Fisicoquímica. 3ra Edición. UNMSM. Lima, Perú.
- Rask, C. 1989. Thermal properties of dough and bakery products: a review of published data. Journal Food Engineering. 9: 167-193
- Sablani, S; Marcotte, M; Baik, O; Castaigne, F. 1998. Modeling of simultaneous heat and water transport in the baking process: A review. Lebensm. Wiss. Technol. 31: 201-209

- Sablani, S. 2009. Measurement of Surface Heat Transfer Coefficient. En: Handbook of Food Preservation, 2nd ed. Rahman, M.S. (ed.). CRC Press, Boca Raton, FL.
- Salas, V.W; Vidaurre, RJ; Solano, C.M; Zelada, B.M. 2019. Three-dimensional modeling of heat transfer during freezing of suspended and in-contact-with-a-surface yellow potatoes and ullucus. Journal of Food Process Engineering. Faculty of Food Engineering, National Agrarian University, La Molina, Perú.
- Singh, R.P; Heldman, D. 2001. Introducción a la Ingeniería de los Alimentos. 2da. Edición. Editorial Acribia. España.
- Singh, R.P; Heldman, D. 2014. Introduction to Food Engineering, 5ta. Ed. Elsevier, USA.
- Ureña, P.M; Linares, G.L; Chire, F.G. 2017. Guía de prácticas de laboratorio físicoquímica de los alimentos. Departamento de Ingeniería de Alimentos y Productos Agropecuarios. Facultad de Industrias Alimentarias. UNA-La Molina
- Vidaurre, R.J.M. 2015. Modelamiento de la transferencia de calor durante el escaldado del loche (cucurbita moschata) y papa (*Solanum tuberosum*). Maestría en Tecnología de Alimentos. UNALM. Lima, 186 p.
- Wadsworth, J.I. y Spadaro, J.J. 1969. Transient temperature distribution in whole sweetpotato roots during immersion heating 1. Food Technology. Vol. 23, 219. Pag. 85 – 89.
- Wadsworth, J.I. y Spadaro, J.J. 1970. Transient temperature distribution in whole sweetpotato roots during immersion heating 2. Food Technology. Vol. 24, 913. Pag. 77 – 84.
- Wilson, H.A. y Singh, R.P. 1987. Numerical simulation of individual quick freezing of spherical foods. *International Journal of Refrigeration*, 10: 149 – 155.
- Woodfield, P.L; Monde, M; Mitsutake, Y. 2007. On estimating thermal diffusivity using analytical inverse solution for unsteady one-dimensional heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 50, 1202–1205.

- Yanniotis, S; Sundén, B. 2007. Heat Transfer in Food Processing. Recent Developments and Application. Witt press Southampton, Boston – USA.
- Yunus, A; Cengel, B. 2006. Transferencia de calor. Editorial McGraw-Hill. Segunda edición. Mexico.
- Zheleva, I. y Kamburova, V. 2009. Modeling of Heating During Food Processing. Rouse University, Bulgaria.
- Zorrilla, S.E. y Singh, R.P. 2000. Heat transfer in meat patties during double-sided cooking. Food Science Technology. Vol. 6(2). Pag. 130 –135.

BIBLIOGRAFÍAS ELECTRÓNICAS

1. www.comunidadperuana.com.ar/shop/imprimirnoticia.asp?notid=250
2. www.datapaq.com./languages/spanish/temperature_profiling/index_main.htm
3. [www.inei.gob.pe . ministerio de agricultura.\(2004\)](http://www.inei.gob.pe . ministerio de agricultura.(2004))
4. <http://www.revistadyna.com/dyna/cms/articulos/FichaArticulos.asp?IdMenu=2&IdEjemplar=40&IdDocumento=938>
5. <http://lultimapitada.blogspot.com/2008/11/transferencia-de-calor-por-radiacion-y.html>

VIII. ANEXOS

ANEXO 1: Símbolos usados

- α = Difusividad térmica (m^2/s)
- K = Conductividad térmica ($Kcal/h\cdot m\cdot ^\circ k$)
- ρ = Densidad (kg/m^3)
- Cp = Calor específico ($Kcal/g\cdot ^\circ k$)
- a = Radio del cilindro (m)
- l = Altura del cilindro (m)
- m = Pendiente de la ecuación de la recta.
- T_o = Temperatura inicial de la muestra ($^\circ C$) .
- T_i = Temperatura de la interface ($^\circ C$) .
- T = Temperatura del centro geométrico de la muestra a un tiempo “ θ ” ($^\circ C$)
- r_1 = Distancia desde el eje longitudinal del cilindro al punto de medición de temperatura (m) .
- r = radio máximo del cilindro (m) .
- J_o = Función Bessel de orden cero .
- J_1 = Función Bessel de primer orden .
- B_n = Raíz “n” de función Bessel de orden cero, de primera especie .
- α = Difusividad térmica (m^2/s) .
- θ = Tiempo (s)
- K = Conductividad térmica de la muestra ($W/m^\circ C$) .
- h = Coeficiente individual de transmisión de calor del fluido calefactor ($W/m^\circ C$) .

ANEXO 2. Programa elaborado en Visual Basic en Excel para determinar los perfiles de temperatura de cada posición del sensor en la papa.

```
Private Sub CommandButton1_Click()
```

```
Dim T(1000, 1000)
```

```
'INSERTAR VALORES
```

```
D = Cells(6, 3)
```

```
ttotal = Cells(7, 3)
```

```
Tini = Cells(8, 3)
```

```
Tfin = Cells(9, 3)
```

```
Difu = Cells(10, 3)
```

```
dt = Cells(11, 3)
```

```
nr = Cells(12, 3)
```

```
'RESULTADOS
```

```
R = D / 2
```

```
dr = R / (nr - 1)
```

```
Step = ttotal / dt
```

```
Cells(6, 9) = R
```

```
Cells(7, 9) = Difu
```

```
Cells(8, 9) = dr
```

'SIMULACIÓN DE TEMPERATURAS INICIALES EN TODOS LOS NODOS

For i = 1 To nr

T(i, 0) = Tini

Next i

'SIMULACION DE TEMPERATURAS EN TODOS LOS NODOS

For ti = 0 To Step

For i = 2 To nr - 1

'TEMPERATURA SUPERFICIAL

T(nr, ti + 1) = Tfin

'TEMPERATUR CENTRAL

$T(1, ti + 1) = (1 - (6 * \text{Difu} * dt / dr^2)) * T(1, ti) + T(2, ti) * (6 * \text{Difu} * dt / dr^2)$

'TEMPERATUR INTERIOR

$T(i, ti + 1) = ((\text{Difu} * dt) / (dr^2)) * (((i - 2) / (i - 1)) * T(i - 1, ti) + ((dr^2 / (\text{Difu} * dt)) - 2) * T(i, ti) + (i / (i - 1)) * T(i + 1, ti))$

Next i

Next ti

'IMPRESION DE LOS VALORES DE TIEMPO Y TEMPERATURA EN TODOS LOS
NODOS

For ti = 0 To Step

Cells(12 + ti, 7) = (ti * dt) / 60

Cells(12 + ti, 8) = T(1, ti)

Cells(12 + ti, 9) = T(2, ti)

Cells(12 + ti, 10) = T(3, ti)

Cells(12 + ti, 11) = T(4, ti)

Cells(12 + ti, 12) = T(5, ti)

Cells(12 + ti, 13) = T(6, ti)

Cells(12 + ti, 14) = T(7, ti)

Cells(12 + ti, 15) = T(8, ti)

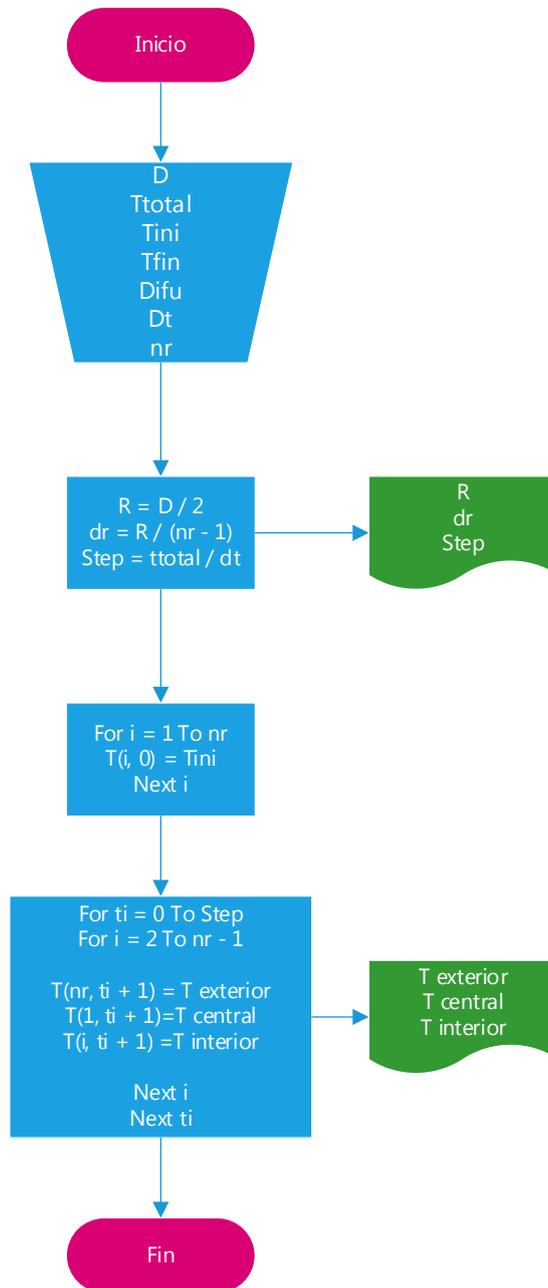
Cells(12 + ti, 16) = T(9, ti)

Cells(12 + ti, 17) = T(10, ti)

Next ti

End Sub

ANEXO 3. Algoritmo y Diagrama de Flujo para la simulación de la transferencia de calor en una esfera



ANEXO 4. Determinación experimental de la temperatura (T_{ij}) a diferentes posiciones en la papa utilizando el Método Explícito (Hacia Adelante).

Se hizo de acuerdo a las ecuaciones (3.27) y (3.28); tal que:

Para calcular los nodos de la esfera entre el centro y la superficie, según (Ozilgen 2011) será:

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{(i-1,j)} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{(i,j)} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{(i+1,j)} \right] \dots\dots(3.27)$$

Y para calcular el nodo central de una esfera según (Ozilgen 2011); será:

$$T_{(i,j+1)} = \left(1 - \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \right) T_{(1,j)} + \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} T_{(2,j)} \dots\dots\dots(3.28)$$

Donde:

$$\text{Radio de la Papa (} r \text{) } = 3,8268 \text{ cm } = 0,038268 \text{ m}$$

$$\text{Division del radio de la Papa (} \Delta r \text{) } = \frac{r}{n-1} = \frac{0,038268 \text{ m}}{8} = 0,0047835 \text{ m}$$

$$\text{Division del tiempo (} \Delta t \text{) } = 30 \text{ segundos}$$

$$\text{Difusividad termica de la Papa (} \alpha \text{) } = 1,49 \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Remplazando datos en las ecuaciones (3.27) y (3.28), se tuvo:

$$i = 1 , j = 0$$

$$T_{i,j+1} = \left[1 - \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \right] T_{1,j} + \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} T_{2,j}$$

$$T_{1,1} = \left[1 - \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \times 30 \text{ s}}{(0,0047835 \text{ m})^2} \right] T_{1,0} + \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \times 30 \text{ s}}{(0,0047835 \text{ m})^2} T_{2,0}$$

$$T_{1,1} = -0,17211 T_{1,0} + 1,17211 T_{2,0}$$

$$T_{1,1} = -0,17211 (20,152) + 1,17211 (20,152)$$

$$T_{1,1} = 20,152$$

$$i = 2 , j = 0$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{2,1} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{2-2}{2-1} \right) T_{1,0} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{2,0} + \left(\frac{2}{2-1} \right) T_{3,0} \right]$$

$$T_{2,1} = 0,19535 [0T_{1,0} + 3,11899T_{2,0} + 2T_{3,0}]$$

$$T_{2,1} = 0,19535 [0 + 3,11899(20,152) + 2(20,152)]$$

$$T_{2,1} = 20,152$$

$$i = 3 , j = 0$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{3,1} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{3-2}{3-1} \right) T_{2,0} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{3,0} + \left(\frac{3}{3-1} \right) T_{4,0} \right]$$

$$T_{3,1} = 0,19535 [0,5 T_{2,0} + 3,11899T_{3,0} + 1,5 T_{4,0}]$$

$$T_{3,1} = 0,19535 [0,5(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,5(20,152)]$$

$$T_{3,1} = 20,152$$

$$i = 4 , j = 0$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{4,1} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{4-2}{4-1} \right) T_{3,0} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{4,0} + \left(\frac{4}{4-1} \right) T_{5,0} \right]$$

$$T_{4,1} = 0,19535 [0,667 T_{3,0} + 3,11899T_{4,0} + 1,333 T_{5,0}]$$

$$T_{4,1} = 0,19535 [0,667(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,333(20,152)]$$

$$T_{4,1} = 20,152$$

$$i = 5 , j = 0$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{5,1} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{5-2}{5-1} \right) T_{4,0} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{5,0} + \left(\frac{5}{5-1} \right) T_{6,0} \right]$$

$$T_{5,1} = 0,19535 [0,75 T_{4,0} + 3,11899 T_{5,0} + 1,25 T_{6,0}]$$

$$T_{5,1} = 0,19535 [0,75 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,25 (20,152)]$$

$$T_{5,1} = 20,152$$

$$i = 6 , j = 0$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{6,1} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{6-2}{6-1} \right) T_{5,0} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{6,0} + \left(\frac{6}{6-1} \right) T_{7,0} \right]$$

$$T_{6,1} = 0,19535 [0,8 T_{5,0} + 3,11899 T_{6,0} + 1,2 T_{7,0}]$$

$$T_{6,1} = 0,19535 [0,8 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,2 (20,152)]$$

$$T_{6,1} = 20,152$$

$$i = 7 , j = 0$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{7,1} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{7-2}{7-1} \right) T_{6,0} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{7,0} + \left(\frac{7}{7-1} \right) T_{8,0} \right]$$

$$T_{7,1} = 0,19535 [0,83 T_{6,0} + 3,11899 T_{7,0} + 1,17 T_{8,0}]$$

$$T_{7,1} = 0,19535 [0,83 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,17 (20,152)]$$

$$T_{7,1} = 20,152$$

$$i = 8 , j = 0$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{8,1} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{8-2}{8-1} \right) T_{7,0} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{8,0} + \left(\frac{8}{8-1} \right) T_{9,0} \right]$$

$$T_{8,1} = 0,19535 [0,86 T_{7,0} + 3,11899 T_{8,0} + 1,14 T_{9,0}]$$

$$T_{8,1} = 0,19535 [0,86 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,14 (20,152)]$$

$$T_{8,1} = 20,152$$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152
0,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	70

$$i = 1 , j = 1$$

$$T_{i,j+1} = \left[1 - \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \right] T_{1,j} + \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} T_{2,j}$$

$$T_{1,2} = \left[1 - \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \right] T_{1,1} + \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} T_{2,1}$$

$$T_{1,2} = -0,17211 T_{1,1} + 1,17211 T_{2,1}$$

$$T_{1,2} = -0,17211 (20,152) + 1,17211 (20,152)$$

$$T_{1,2} = 20,152$$

$$i = 2 , j = 1$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{2,2} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{2-2}{2-1} \right) T_{1,1} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{2,1} + \left(\frac{2}{2-1} \right) T_{3,1} \right]$$

$$T_{2,2} = 0,19535 [0T_{1,1} + 3,11899T_{2,1} + 2T_{3,1}]$$

$$T_{2,2} = 0,19535 [0(20,152) + 3,11899(20,152) + 2(20,152)]$$

$$T_{2,2} = 20,152$$

$$i = 3 , j = 1$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{3,2} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{3-2}{3-1} \right) T_{2,1} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{3,1} + \left(\frac{3}{3-1} \right) T_{4,1} \right]$$

$$T_{3,2} = 0,19535 [0,5 T_{2,1} + 3,11899T_{3,1} + 1,5 T_{4,1}]$$

$$T_{3,2} = 0,19535 [0,5(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,5(20,152)]$$

$$T_{3,2} = 20,152$$

$$i = 4 , j = 1$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{4,2} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{4-2}{4-1} \right) T_{3,1} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{4,1} + \left(\frac{4}{4-1} \right) T_{5,1} \right]$$

$$T_{4,2} = 0,19535 [0,667 T_{3,1} + 3,11899T_{4,1} + 1,333 T_{5,1}]$$

$$T_{4,2} = 0,19535 [0,667(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,333(20,152)]$$

$$T_{4,2} = 20,152$$

$$i = 5 , j = 1$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{5,2} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{5-2}{5-1} \right) T_{4,1} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{5,1} + \left(\frac{5}{5-1} \right) T_{6,1} \right]$$

$$T_{5,2} = 0,19535 [0,75 T_{4,1} + 3,11899 T_{5,1} + 1,25 T_{6,1}]$$

$$T_{5,2} = 0,19535 [0,75 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,25 (20,152)]$$

$$T_{5,2} = 20,152$$

$$i = 6 , j = 1$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{6,2} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{6-2}{6-1} \right) T_{5,1} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{6,1} + \left(\frac{6}{6-1} \right) T_{7,1} \right]$$

$$T_{6,2} = 0,19535 [0,8 T_{5,1} + 3,11899 T_{6,1} + 1,2 T_{7,1}]$$

$$T_{6,2} = 0,19535 [0,8 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,2 (20,152)]$$

$$T_{6,2} = 20,152$$

$$i = 7 , j = 1$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{7,2} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{7-2}{7-1} \right) T_{6,1} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{7,1} + \left(\frac{7}{7-1} \right) T_{8,1} \right]$$

$$T_{7,2} = 0,19535 [0,83 T_{6,1} + 3,11899 T_{7,1} + 1,17 T_{8,1}]$$

$$T_{7,2} = 0,19535 [0,83 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,17 (20,152)]$$

$$T_{7,2} = 20,152$$

$$i = 8 , j = 1$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{8,2} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{8-2}{8-1} \right) T_{7,1} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{8,1} + \left(\frac{8}{8-1} \right) T_{9,1} \right]$$

$$T_{8,2} = 0,19535 [0,86 T_{7,1} + 3,11899 T_{8,1} + 1,14 T_{9,1}]$$

$$T_{8,2} = 0,19535 [0,86 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,14 (70)]$$

$$T_{8,2} = 20,152$$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152
0,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	70
1,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	31,253	70

$$i = 1 , j = 2$$

$$T_{i,j+1} = \left[1 - \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \right] T_{1,j} + \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} T_{2,j}$$

$$T_{1,3} = \left[1 - \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \right] T_{1,2} + \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} T_{2,2}$$

$$T_{1,3} = -0,17211 T_{1,2} + 1,17211 T_{2,2}$$

$$T_{1,3} = -0,17211 (20,152) + 1,17211 (20,152)$$

$$T_{1,3} = 20,152$$

$$i = 2 , j = 2$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{2,3} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{2-2}{2-1} \right) T_{1,2} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{2,2} + \left(\frac{2}{2-1} \right) T_{3,2} \right]$$

$$T_{2,3} = 0,19535 [0T_{1,2} + 3,11899T_{2,2} + 2T_{3,2}]$$

$$T_{2,3} = 0,19535 [0(20,152) + 3,11899(20,152) + 2(20,152)]$$

$$T_{2,3} = 20,152$$

$$i = 3 , j = 2$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{3,3} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{3-2}{3-1} \right) T_{2,2} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{3,2} + \left(\frac{3}{3-1} \right) T_{4,2} \right]$$

$$T_{3,3} = 0,19535 [0,5 T_{2,2} + 3,11899T_{3,2} + 1,5 T_{4,2}]$$

$$T_{3,3} = 0,19535 [0,5(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,5(20,152)]$$

$$T_{3,3} = 20,152$$

$$i = 4 , j = 2$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{4,3} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{4-2}{4-1} \right) T_{3,2} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{4,2} + \left(\frac{4}{4-1} \right) T_{5,2} \right]$$

$$T_{4,3} = 0,19535 [0,667 T_{3,2} + 3,11899T_{4,2} + 1,333 T_{5,2}]$$

$$T_{4,3} = 0,19535 [0,667(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,333(20,152)]$$

$$T_{4,3} = 20,152$$

$$i = 5 , j = 2$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{5,3} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{5-2}{5-1} \right) T_{4,2} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{5,2} + \left(\frac{5}{5-1} \right) T_{6,2} \right]$$

$$T_{5,3} = 0,19535 [0,75 T_{4,2} + 3,11899 T_{5,2} + 1,25 T_{6,2}]$$

$$T_{5,3} = 0,19535 [0,75 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,25 (20,152)]$$

$$T_{5,3} = 20,152$$

$$i = 6 , j = 2$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{6,3} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{6-2}{6-1} \right) T_{5,2} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{6,2} + \left(\frac{6}{6-1} \right) T_{7,2} \right]$$

$$T_{6,3} = 0,19535 [0,8 T_{5,2} + 3,11899 T_{6,2} + 1,2 T_{7,2}]$$

$$T_{6,3} = 0,19535 [0,8 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,2 (20,152)]$$

$$T_{6,3} = 20,152$$

$$i = 7 , j = 2$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{7,3} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{7-2}{7-1} \right) T_{6,2} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{7,2} + \left(\frac{7}{7-1} \right) T_{8,2} \right]$$

$$T_{7,3} = 0,19535 [0,83 T_{6,2} + 3,11899 T_{7,2} + 1,17 T_{8,2}]$$

$$T_{7,3} = 0,19535 [0,83 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,17 (31,253)]$$

$$T_{7,3} = 22,689$$

$$i = 8 , j = 2$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{8,3} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{8-2}{8-1} \right) T_{7,2} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{8,2} + \left(\frac{8}{8-1} \right) T_{9,2} \right]$$

$$T_{8,3} = 0,19535 [0,86 T_{7,2} + 3,11899 T_{8,2} + 1,14 T_{9,2}]$$

$$T_{8,3} = 0,19535 [0,86 (20,152) + 3,11899 (31,253) + 1,14 (70)]$$

$$T_{8,3} = 38,017$$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152
0,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	70
1,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	31,253	70
1,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	22,689	38,017	70

$$i = 1 , j = 3$$

$$T_{i,j+1} = \left[1 - \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \right] T_{1,j} + \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} T_{2,j}$$

$$T_{1,4} = \left[1 - \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \right] T_{1,3} + \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} T_{2,3}$$

$$T_{1,4} = -0,17211 T_{1,3} + 1,17211 T_{2,3}$$

$$T_{1,4} = -0,17211 (20,152) + 1,17211 (20,152)$$

$$T_{1,4} = 20,152$$

$$i = 2 , j = 3$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{2,4} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{2-2}{2-1} \right) T_{1,3} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{2,3} + \left(\frac{2}{2-1} \right) T_{3,3} \right]$$

$$T_{2,4} = 0,19535 [0T_{1,3} + 3,11899T_{2,3} + 2T_{3,3}]$$

$$T_{2,4} = 0,19535 [0(20,152) + 3,11899(20,152) + 2(20,152)]$$

$$T_{2,4} = 20,152$$

$$i = 3 , j = 3$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{3,4} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{3-2}{3-1} \right) T_{2,3} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{3,3} + \left(\frac{3}{3-1} \right) T_{4,3} \right]$$

$$T_{3,4} = 0,19535 [0,5 T_{2,3} + 3,11899T_{3,3} + 1,5 T_{4,3}]$$

$$T_{3,4} = 0,19535 [0,5(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,5(20,152)]$$

$$T_{3,4} = 20,152$$

$$i = 4 , j = 3$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{4,4} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{4-2}{4-1} \right) T_{3,3} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{4,3} + \left(\frac{4}{4-1} \right) T_{5,3} \right]$$

$$T_{4,4} = 0,19535 [0,667 T_{3,3} + 3,11899T_{4,3} + 1,333 T_{5,3}]$$

$$T_{4,4} = 0,19535 [0,667(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,333(20,152)]$$

$$T_{4,4} = 20,152$$

$$i = 5 , j = 3$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{5,4} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{5-2}{5-1} \right) T_{4,3} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{5,3} + \left(\frac{5}{5-1} \right) T_{6,3} \right]$$

$$T_{5,4} = 0,19535 [0,75 T_{4,3} + 3,11899 T_{5,3} + 1,25 T_{6,3}]$$

$$T_{5,4} = 0,19535 [0,75 (20,152) + 3,11899(20,152) + 1,25(20,152)]$$

$$T_{5,4} = 20,152$$

$$i = 6 , j = 3$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{6,4} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{6-2}{6-1} \right) T_{5,3} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{6,3} + \left(\frac{6}{6-1} \right) T_{7,3} \right]$$

$$T_{6,4} = 0,19535 [0,8 T_{5,3} + 3,11899 T_{6,3} + 1,2 T_{7,3}]$$

$$T_{6,4} = 0,19535 [0,8 (20,152) + 3,11899(20,152) + 1,2(22,689)]$$

$$T_{6,4} = 20,747$$

$$i = 7 , j = 3$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{7,4} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{7-2}{7-1} \right) T_{6,3} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{7,3} + \left(\frac{7}{7-1} \right) T_{8,3} \right]$$

$$T_{7,4} = 0,19535 [0,83 T_{6,3} + 3,11899 T_{7,3} + 1,17 T_{8,3}]$$

$$T_{7,4} = 0,19535 [0,83 (20,152) + 3,11899(22,689) + 1,17(38,017)]$$

$$T_{7,4} = 25,781$$

$$i = 8 , j = 3$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha\Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{8,4} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{8-2}{8-1} \right) T_{7,3} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{8,3} + \left(\frac{8}{8-1} \right) T_{9,3} \right]$$

$$T_{8,4} = 0,19535 [0,86 T_{7,3} + 3,11899 T_{8,3} + 1,14 T_{9,3}]$$

$$T_{8,4} = 0,19535 [0,86 (22,689) + 3,11899 (38,017) + 1,14 (70)]$$

$$T_{8,4} = 42,564$$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152
0,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	70
1,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	31,253	70
1,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	22,689	38,017	70
2,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,747	25,781	42,564	70

$$i = 1 , j = 4$$

$$T_{i,j+1} = \left[1 - \frac{6\alpha\Delta t}{\Delta r^2} \right] T_{1,j} + \frac{6\alpha\Delta t}{\Delta r^2} T_{2,j}$$

$$T_{1,5} = \left[1 - \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \right] T_{1,4} + \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} T_{2,4}$$

$$T_{1,5} = -0,17211 T_{1,4} + 1,17211 T_{2,4}$$

$$T_{1,5} = -0,17211 (20,152) + 1,17211 (20,152)$$

$$T_{1,4} = 20,152$$

$$i = 2 , \quad j = 4$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{2,5} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{2-2}{2-1} \right) T_{1,4} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{2,4} + \left(\frac{2}{2-1} \right) T_{3,4} \right]$$

$$T_{2,5} = 0,19535 [0T_{1,4} + 3,11899T_{2,4} + 2T_{3,4}]$$

$$T_{2,5} = 0,19535 [0(20,152) + 3,11899(20,152) + 2(20,152)]$$

$$T_{2,5} = 20,152$$

$$i = 3 , \quad j = 4$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{3,5} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{3-2}{3-1} \right) T_{2,4} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{3,4} + \left(\frac{3}{3-1} \right) T_{4,4} \right]$$

$$T_{3,5} = 0,19535 [0,5 T_{2,4} + 3,11899T_{3,4} + 1,5 T_{4,4}]$$

$$T_{3,5} = 0,19535 [0,5(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,5(20,152)]$$

$$T_{3,5} = 20,152$$

$$i = 4 , \quad j = 4$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{4,5} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{4-2}{4-1} \right) T_{3,4} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{4,4} + \left(\frac{4}{4-1} \right) T_{5,4} \right]$$

$$T_{4,5} = 0,19535 [0,667 T_{3,4} + 3,11899T_{4,4} + 1,333 T_{5,4}]$$

$$T_{4,5} = 0,19535 [0,667(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,333(20,152)]$$

$$T_{4,5} = 20,152$$

$$i = 5 , j = 4$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{5,5} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{5-2}{5-1} \right) T_{4,4} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{5,4} + \left(\frac{5}{5-1} \right) T_{6,4} \right]$$

$$T_{5,5} = 0,19535 [0,75 T_{4,4} + 3,11899 T_{5,4} + 1,25 T_{6,4}]$$

$$T_{5,5} = 0,19535 [0,75 (20,152) + 3,11899 (20,152) + 1,25 (20,747)]$$

$$T_{5,5} = 20,297$$

$$i = 6 , j = 4$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{6,5} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{6-2}{6-1} \right) T_{5,4} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{6,4} + \left(\frac{6}{6-1} \right) T_{7,4} \right]$$

$$T_{6,5} = 0,19535 [0,8 T_{5,4} + 3,11899 T_{6,4} + 1,2 T_{7,4}]$$

$$T_{6,5} = 0,19535 [0,8 (20,152) + 3,11899 (20,747) + 1,2 (25,781)]$$

$$T_{6,5} = 21,834$$

$$i = 7 , j = 4$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{7,5} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{7-2}{7-1} \right) T_{6,4} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{7,4} + \left(\frac{7}{7-1} \right) T_{8,4} \right]$$

$$T_{7,5} = 0,19535 [0,83 T_{6,4} + 3,11899 T_{7,4} + 1,17 T_{8,4}]$$

$$T_{7,5} = 0,19535 [0,83 (20,747) + 3,11899 (25,781) + 1,17 (42,564)]$$

$$T_{7,5} = 28,801$$

$$i = 8 , j = 4$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{8,5} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{8-2}{8-1} \right) T_{7,4} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{8,4} + \left(\frac{8}{8-1} \right) T_{9,4} \right]$$

$$T_{8,5} = 0,19535 [0,86 T_{7,4} + 3,11899 T_{8,4} + 1,14 T_{9,4}]$$

$$T_{8,5} = 0,19535 [0,86 (25,781) + 3,11899 (42,564) + 1,14 (70)]$$

$$T_{8,5} = 45,854$$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152
0,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	70
1,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	31,253	70
1,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	22,689	38,017	70
2,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,747	25,781	42,564	70
2,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,297	21,834	28,801	45,854	70

$$i = 1 , j = 5$$

$$T_{i,j+1} = \left[1 - \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \right] T_{1,j} + \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} T_{2,j}$$

$$T_{1,6} = \left[1 - \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \right] T_{1,5} + \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} T_{2,5}$$

$$T_{1,6} = -0,17211 T_{1,5} + 1,17211 T_{2,5}$$

$$T_{1,6} = -0,17211 (20,152) + 1,17211 (20,152)$$

$$T_{1,6} = 20,152$$

$$i = 2 , j = 5$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{2,6} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{2-2}{2-1} \right) T_{1,5} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{2,5} + \left(\frac{2}{2-1} \right) T_{3,5} \right].$$

$$T_{2,6} = 0,19535 [0T_{1,5} + 3,11899T_{2,5} + 2T_{3,5}]$$

$$T_{2,6} = 0,19535 [0(20,152) + 3,11899(20,152) + 2(20,152)]$$

$$T_{2,6} = 20,152$$

$$i = 3 , j = 5$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{3,6} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{3-2}{3-1} \right) T_{2,5} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{3,5} + \left(\frac{3}{3-1} \right) T_{4,5} \right].$$

$$T_{3,6} = 0,19535 [0,5 T_{2,5} + 3,11899T_{3,5} + 1,5 T_{4,5}]$$

$$T_{3,6} = 0,19535 [0,5(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,5(20,152)]$$

$$T_{3,6} = 20,152$$

$$i = 4 , j = 5$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{4,6} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{4-2}{4-1} \right) T_{3,5} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{4,5} + \left(\frac{4}{4-1} \right) T_{5,5} \right].$$

$$T_{4,6} = 0,19535 [0,667 T_{3,5} + 3,11899T_{4,5} + 1,333 T_{5,5}]$$

$$T_{4,6} = 0,19535 [0,667(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,333(20,297)]$$

$$T_{4,6} = 20,190$$

$$i = 5 , j = 5$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{5,6} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{5-2}{5-1} \right) T_{4,5} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{5,5} + \left(\frac{5}{5-1} \right) T_{6,5} \right]$$

$$T_{5,6} = 0,19535 [0,75 T_{4,5} + 3,11899 T_{5,5} + 1,25 T_{6,5}]$$

$$T_{5,6} = 0,19535 [0,75 (20,152) + 3,11899(20,297) + 1,25(21,834)]$$

$$T_{5,6} = 20,651$$

$$i = 6 , j = 5$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{6,6} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{6-2}{6-1} \right) T_{5,5} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{6,5} + \left(\frac{6}{6-1} \right) T_{7,5} \right]$$

$$T_{6,6} = 0,19535 [0,8 T_{5,5} + 3,11899 T_{6,5} + 1,2 T_{7,5}]$$

$$T_{6,6} = 0,19535 [0,8 (20,297) + 3,11899(21,834) + 1,2(28,801)]$$

$$T_{6,6} = 23,227$$

$$i = 7 , j = 5$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{7,6} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{7-2}{7-1} \right) T_{6,5} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{7,5} + \left(\frac{7}{7-1} \right) T_{8,5} \right]$$

$$T_{7,6} = 0,19535 [0,83 T_{6,5} + 3,11899 T_{7,5} + 1,17 T_{8,5}]$$

$$T_{7,6} = 0,19535 [0,83 (21,834) + 3,11899(28,801) + 1,17(45,854)]$$

$$T_{7,6} = 31,568$$

$$i = 8 , j = 5$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{8,6} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{8-2}{8-1} \right) T_{7,5} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{8,5} + \left(\frac{8}{8-1} \right) T_{9,5} \right]$$

$$T_{8,6} = 0,19535 [0,86 T_{7,5} + 3,11899 T_{8,5} + 1,14 T_{9,5}]$$

$$T_{8,6} = 0,19535 [0,86 (28,801) + 3,11899 (45,854) + 1,14 (70)]$$

$$T_{8,6} = 48,366$$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152
0,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	70
1,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	31,253	70
1,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	22,689	38,017	70
2,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,747	25,781	42,564	70
2,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,297	21,834	28,801	45,854	70
3,0 min	20,152	20,152	20,152	20,190	20,651	23,227	31,568	48,366	70

$$i = 1 , j = 6$$

$$T_{i,j+1} = \left[1 - \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \right] T_{1,j} + \frac{6\alpha \Delta t}{\Delta r^2} T_{2,j}$$

$$T_{1,7} = \left[1 - \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \right] T_{1,6} + \frac{6 \times 1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} T_{2,6}$$

$$T_{1,7} = -0,17211 T_{1,6} + 1,17211 T_{2,6}$$

$$T_{1,7} = -0,17211 (20,152) + 1,17211 (20,152)$$

$$T_{1,7} = 20,152$$

$$i = 2 , j = 6$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{2,7} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{2-2}{2-1} \right) T_{1,6} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{2,6} + \left(\frac{2}{2-1} \right) T_{3,6} \right].$$

$$T_{2,7} = 0,19535 [0T_{1,6} + 3,11899T_{2,6} + 2T_{3,6}]$$

$$T_{2,7} = 0,19535 [0(20,152) + 3,11899(20,152) + 2(20,152)]$$

$$T_{2,7} = 20,152$$

$$i = 3 , j = 6$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{3,7} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{3-2}{3-1} \right) T_{2,6} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{3,6} + \left(\frac{3}{3-1} \right) T_{4,6} \right].$$

$$T_{3,7} = 0,19535 [0,5 T_{2,6} + 3,11899T_{3,6} + 1,5 T_{4,6}]$$

$$T_{3,7} = 0,19535 [0,5(20,152) + 3,11899(20,152) + 1,5(20,190)]$$

$$T_{3,7} = 20,163$$

$$i = 4 , j = 6$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{4,7} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{4-2}{4-1} \right) T_{3,6} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{4,6} + \left(\frac{4}{4-1} \right) T_{5,6} \right].$$

$$T_{4,7} = 0,19535 [0,667 T_{3,6} + 3,11899T_{4,6} + 1,333 T_{5,6}]$$

$$T_{4,7} = 0,19535 [0,667(20,152) + 3,11899(20,190) + 1,333(20,651)]$$

$$T_{4,7} = 20,305$$

$$i = 5 , j = 6$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{5,7} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{5-2}{5-1} \right) T_{4,6} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{5,6} + \left(\frac{5}{5-1} \right) T_{6,6} \right]$$

$$T_{5,7} = 0,19535 [0,75 T_{4,6} + 3,11899 T_{5,6} + 1,25 T_{6,6}]$$

$$T_{5,7} = 0,19535 [0,75 (20,190) + 3,11899 (20,651) + 1,25 (23,227)]$$

$$T_{5,7} = 21,212$$

$$i = 6 , j = 6$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{6,7} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{6-2}{6-1} \right) T_{5,6} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{6,6} + \left(\frac{6}{6-1} \right) T_{7,6} \right]$$

$$T_{6,7} = 0,19535 [0,8 T_{5,6} + 3,11899 T_{6,6} + 1,2 T_{7,6}]$$

$$T_{6,7} = 0,19535 [0,8 (20,651) + 3,11899 (23,227) + 1,2 (31,568)]$$

$$T_{6,6} = 24,780$$

$$i = 7 , j = 6$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{7,7} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{7-2}{7-1} \right) T_{6,6} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{7,6} + \left(\frac{7}{7-1} \right) T_{8,6} \right]$$

$$T_{7,7} = 0,19535 [0,83 T_{6,6} + 3,11899 T_{7,6} + 1,17 T_{8,6}]$$

$$T_{7,7} = 0,19535 [0,83 (23,227) + 3,11899 (31,568) + 1,17 (48,366)]$$

$$T_{7,7} = 34,054$$

$$i = 8 , j = 6$$

$$T_{(i,j+1)} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta r^2} \left[\left(\frac{i-2}{i-1} \right) T_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta r^2}{\alpha \Delta t} - 2 \right) T_{i,j} + \left(\frac{i}{i-1} \right) T_{i+1,j} \right]$$

$$T_{8,7} = \frac{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s}{(0,0047835 m)^2} \left[\left(\frac{8-2}{8-1} \right) T_{7,6} + \left(\frac{(0,0047835 m)^2}{1,49 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s} \times 30s} - 2 \right) T_{8,6} + \left(\frac{8}{8-1} \right) T_{9,6} \right]$$

$$T_{8,7} = 0,19535 [0,86 T_{7,6} + 3,11899 T_{8,6} + 1,14 T_{9,6}]$$

$$T_{8,7} = 0,19535 [0,86 (31,568) + 3,11899 (48,366) + 1,14 (70)]$$

$$T_{8,7} = 50,362$$

$\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152
0,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	70
1,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	31,253	70
1,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	22,689	38,017	70
2,0 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152	20,747	25,781	42,564	70
2,5 min	20,152	20,152	20,152	20,152	20,297	21,834	28,801	45,854	70
3,0 min	20,152	20,152	20,152	20,190	20,651	23,227	31,568	48,366	70
3,5 min	20,152	20,152	20,167	20,305	21,212	24,780	34,055	50,362	70

ANEXO 05. Temperaturas experimentales registradas por el sensor por cada minuto, durante los 30 minutos por cada posición en la papa.

Tiempo (minutos)	Posición 0,0	Posición 0,2	Posición 0,4	Posición 0,6	Posición 0,8
0	20,152	20,152	20,152	20,152	20,152
1	20,629	20,830	22,301	27,893	35,814
2	21,247	22,122	25,378	33,385	43,611
3	21,943	23,643	28,242	37,336	47,342
4	22,920	25,769	31,413	40,980	50,269
5	24,123	28,293	34,563	44,158	52,655
6	25,464	30,970	37,527	46,897	54,575
7	26,952	33,665	40,247	49,241	56,141
8	28,596	36,332	42,730	51,275	57,449
9	30,354	38,904	44,986	53,022	58,572
10	32,173	41,306	47,008	54,546	59,547
11	34,019	43,562	48,853	55,911	60,385
12	35,883	45,690	50,511	57,129	61,110
13	37,688	47,651	52,031	58,193	61,744
14	39,458	49,422	53,384	59,133	62,293
15	41,176	51,074	54,615	59,969	62,802
16	42,820	52,587	55,725	60,717	63,262
17	44,392	53,974	56,752	61,391	63,675
18	45,877	55,241	57,688	62,023	64,071
19	47,298	56,384	58,560	62,579	64,445
20	48,644	57,463	59,347	63,086	64,791
21	49,913	58,416	60,067	63,585	65,103
22	51,093	59,303	60,743	64,037	65,390
23	52,214	60,101	61,366	64,461	65,677
24	53,259	60,813	61,941	64,858	65,930
25	54,231	61,495	62,489	65,235	66,169
26	55,146	62,106	62,979	65,580	66,379
27	56,003	62,660	63,440	65,912	66,592
28	56,790	63,199	63,874	66,208	66,784
29	57,539	63,682	64,264	66,477	66,957
30	58,226	64,136	64,615	66,732	67,147

ANEXO 06. Temperaturas experimentales registradas por cada minuto por el equipo de medición Figura (01) para determinar la difusividad térmica (α), durante los 30 minutos.

a). 1ra. Evaluación Experimental

X	Y	X	Y	X	Y
<i>Tiempo (minutos)</i>	<i>Temperatura (°C)</i>	<i>Tiempo (segundos)</i>	<i>Temperatura (°C)</i>	<i>Tiempo (segundos)</i>	$\text{Log} \left(\frac{T_m - T_0}{T_m - T} \right)$
0	21,066	0	21,066	0	-0,01751
1	21,814	60	21,814	60	-0,01082
2	23,177	120	23,177	120	0,00164
3	25,953	180	25,953	180	0,02818
4	27,200	240	27,200	240	0,04065
5	29,011	300	29,011	300	0,05943
6	31,250	360	31,250	360	0,08383
7	33,745	420	33,745	420	0,11273
8	35,231	480	35,231	480	0,13091
9	38,533	540	38,533	540	0,17424
10	41,959	600	41,959	600	0,22430
11	44,525	660	44,525	660	0,26598
12	46,986	720	46,986	720	0,31011
13	48,319	780	48,319	780	0,33602
14	50,502	840	50,502	840	0,38211
15	52,530	900	52,530	900	0,42980
16	53,401	960	53,401	960	0,45202
17	54,136	1020	54,136	1020	0,47169
18	55,714	1080	55,714	1080	0,51719
19	57,159	1140	57,159	1140	0,56350
20	58,482	1200	58,482	1200	0,61072
21	59,666	1260	59,666	1260	0,65783
22	60,729	1320	60,729	1320	0,70497
23	61,681	1380	61,681	1380	0,75203
24	62,502	1440	62,502	1440	0,79715
25	63,057	1500	63,057	1500	0,83055
26	64,019	1560	64,019	1560	0,89532
27	64,692	1620	64,692	1620	0,94717
28	65,367	1680	65,367	1680	1,00624
29	66,012	1740	66,012	1740	1,07134
30	66,594	1800	66,594	1800	1,13985

b). 2da. Evaluación Experimental

X	Y	X	Y	X	Y
<i>Tiempo (minutos)</i>	<i>Temperatura (°C)</i>	<i>Tiempo (segundos)</i>	<i>Temperatura (°C)</i>	<i>Tiempo (segundos)</i>	$\text{Log} \left(\frac{T_m - T_0}{T_m - T} \right)$
0	20,594	0	20,594	0	-0,02168
1	21,224	60	21,224	60	-0,01611
2	22,862	120	22,862	120	-0,00127
3	25,088	180	25,088	180	0,01974
4	26,659	240	26,659	240	0,03520
5	28,581	300	28,581	300	0,05490
6	30,849	360	30,849	360	0,07935
7	32,934	420	32,934	420	0,10312
8	34,677	480	34,677	480	0,12404
9	37,905	540	37,905	540	0,16566
10	41,196	600	41,196	600	0,21265
11	42,893	660	42,893	660	0,23902
12	45,121	720	45,121	720	0,27626
13	46,871	780	46,871	780	0,30794
14	48,929	840	48,929	840	0,34841
15	50,998	900	50,998	900	0,37679
16	52,262	960	52,262	960	0,42319
17	53,701	1020	53,701	1020	0,45994
18	54,944	1080	54,944	1080	0,49439
19	56,730	1140	56,730	1140	0,54923
20	57,830	1200	57,830	1200	0,58681
21	58,945	1260	58,945	1260	0,62854
22	60,270	1320	60,270	1320	0,68399
23	60,913	1380	60,913	1380	0,71368
24	61,770	1440	61,770	1440	0,75669
25	62,654	1500	62,654	1500	0,80605
26	63,517	1560	63,517	1560	0,86032
27	64,407	1620	64,407	1620	0,92445
28	65,587	1680	65,587	1680	1,02736
29	66,007	1740	66,007	1740	1,07080
30	67,159	1800	67,159	1800	1,21863